ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ КИНЕМАТИКЕ

1. Брзина тачке се мијења према закону $\vec{v} = 8t\vec{\imath} - 6t\vec{\jmath}$. Њен је положај у почетном тренутку дефинисан координатама $M_0(2; 0)$.

- Одредити синус угла између вектора убрзања и вектора положаја у тренутку $t_2 = 2$ s.
- Нацртати кинематске дијаграме.
- У ком ће тренутку угао имеђу вектора брзине и вектора убрзања износити $90°$?
- Колика је минимална, а колика максимална вриједност полупречника закривљености путање?

2. Тачка се креће према закону $\varphi(t) = (t^3/3 - 3t^2 + 8t - 2/3)$ [rad] по кружници полупречника 3 m.

- Одредити пут који пређе у интервалу $t \in [1; 6]$.
- Колика је средња угаона брзина на посматраном интервалу?
- Одредити закон промјене убрзања.
- Провјерити да ли је могуће да интензитет брзине у два различита тренутка износи 72 km/h.

ПРВИ ЗАДАТАК

Брзина тачке се мијења према закону $\vec{v} = 8t\vec{i} - 6t\vec{j}$. Њен је положај у почетном тренутку дефинисан координатама $M_0(2; 0)$.

- Одредити синус угла између вектора убрзања и вектора положаја у тренутку $t_2 = 2$ s.
- Нацртати кинематске дијаграме.
- У ком ће тренутку угао имеђу вектора брзине и вектора убрзања износити 90°?
- Колика је минимална, а колика максимална вриједност полупречника закривљености путање?

<u>Синус угла између вектора убрзања и вектора положаја у тренутку $t_2 = 2$ s</u>

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 8t \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_x = 8, \qquad \left.\begin{aligned} v_y &= -6t \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_y = -6$$

$$\vec{a} = 8\vec{i} - 6\vec{j} \Rightarrow a = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$$

$$\vec{a}_2 = 8\vec{i} - 6\vec{j}, \qquad a_2 = 10$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 8t \\ v_x &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dx = 8tdt \Rightarrow \int_{x_0=2}^{x} dx = 8\int_0^t tdt \Rightarrow x - 2 = 4t^2 \Rightarrow x = 2 + 4t^2$$

$$\left.\begin{aligned} v_y &= -6t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dy = -6tdt \Rightarrow \int_{y_0=0}^{y} dx = -6\int_0^t tdt \Rightarrow y = -3t^2$$

$$\vec{r} = (2 + 4t^2)\vec{i} - 3t^2\vec{j} \Rightarrow r = \sqrt{(2 + 4t^2)^2 + (-3t^2)^2}$$

$$\vec{r}_2 = 18\vec{i} - 12\vec{j}, \qquad r_2 = \sqrt{18^2 + (-12)^2} = 21{,}633$$

$$\alpha = \measuredangle(\vec{a}_2, \vec{r}_2)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{r}_2}{a_2 \cdot r_2} = \frac{(8\vec{i} - 6\vec{j}) \cdot (18\vec{i} - 12\vec{j})}{10 \cdot 21{,}633} = \frac{144 + 72}{216{,}33} = 0{,}998$$

<u>I начин</u>

$$\alpha = \arccos 0{,}998 = 3{,}18°$$

$$\boldsymbol{\sin\alpha} = \sin 3{,}18° = \mathbf{0{,}055}$$

<u>II начин</u>

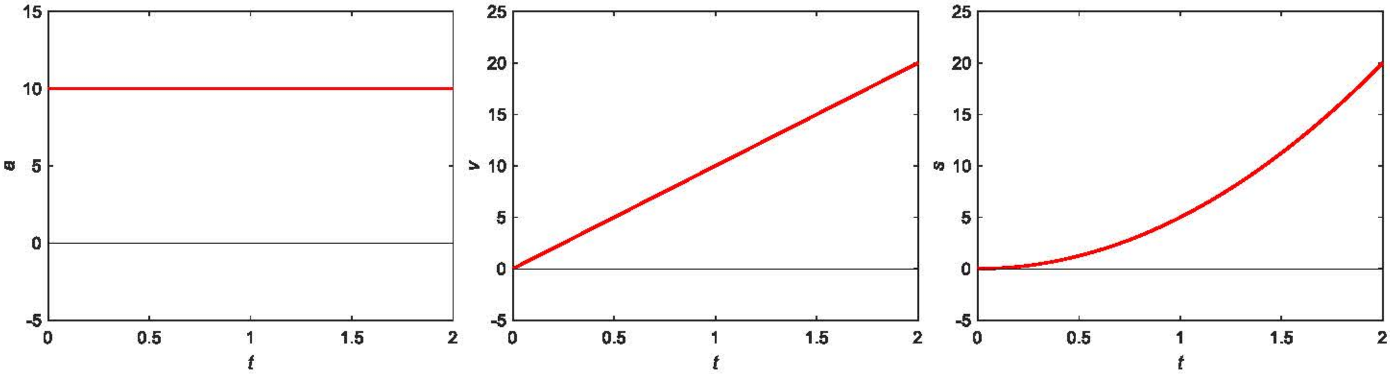
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\sin\alpha} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}998^2} = \mathbf{0{,}055}$$

Кинематски дијаграми

$$a = 10$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 8t \\ v_y &= -6t \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8t)^2 + (-6t)^2} = \sqrt{100t^2} = 10t$$

$$\left.\begin{aligned} v &= 10t \\ v &= \frac{ds}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ds = 10tdt \Rightarrow \int_{s_0=0}^{s} ds = 10 \int_{t_0=0}^{t} tdt \Rightarrow s = 5t^2$$



Тренутак у коме угао имеђу вектора брзине и вектора убрзања износи 90°

Из облика вектора положаја види се да је кретање праволинијско, па су вектор брзине и вектор убрзања колинеарни, односно угао између њих не може никад бити 90°. У наставку ће се то показати.

$$\beta = \measuredangle(\vec{v}, \vec{a})$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v \cdot a} = \frac{(8t\vec{i} - 6t\vec{j}) \cdot (8\vec{i} - 6\vec{j})}{10t \cdot 10} = \frac{64t + 36t}{100t} = \frac{100t}{100t} = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

Минимална и максимална вриједност полупречника закривљености путање

Из облика вектора положаја види се да је кретање праволинијско, па је полупречник закривљености путање увијек ∞. У наставку ће се то показати.

$$\left.\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(10t) = 10 \\ a &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{R_k} \Rightarrow \boldsymbol{R_k} = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{0} = \infty$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

Тачка се креће према закону $\varphi(t) = (t^3/3 - 3t^2 + 8t - 2/3)$ [rad] по кружници полупречника 3 m.

- Одредити пут који пређе у интервалу $t \in [1; 6]$.
- Колика је средња угаона брзина на посматраном интервалу?
- Одредити закон промјене убрзања.
- Провјерити да ли је могуће да интензитет брзине у два различита тренутка износи 72 km/h.

<u>Пређени пут у интервалу $t \in [1; 6]$</u>

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t^2 - 6t + 8$$

Провјерава се да ли у неком тренутку унутар интервала долази до промјене смјера кретања.

$$t^{*2} - 6t^* + 8 = 0$$

$$t^*_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} t^*_1 = 2 \\ t^*_2 = 4 \end{cases}$$

Оба тренутка леже унутар посматраног интервала. То треба узети у обзир.

$$\varphi = t^3/3 - 3t^2 + 8t - 2/3 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = 1/3 - 3 + 8 - 2/3 = 14/3 \\ \varphi_2 = 8/3 - 12 + 16 - 2/3 = 6 \\ \varphi_4 = 64/3 - 48 + 32 - 2/3 = 14/3 \\ \varphi_6 = 216/3 - 108 + 48 - 2/3 = 34/3 \end{cases}$$

$$\varphi_{1-6} = \varphi_{1-2} + \varphi_{2-4} + \varphi_{4-6} = |\varphi_2 - \varphi_1| + |\varphi_4 - \varphi_2| + |\varphi_6 - \varphi_4|$$

$$\varphi_{1-6} = |6 - 14/3| + |14/3 - 6| + |34/3 - 14/3|$$

$$\varphi_{1-6} = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3} = 9{,}33 \text{ rad}$$

$$s = R\varphi \Rightarrow \boldsymbol{s_{1-6}} = 3 \cdot \frac{28}{3} = \mathbf{28\ m}$$

<u>Средња угаона брзина на интервалу $t \in [1; 6]$</u>

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_{sr1-6}} = \frac{\frac{28}{3}}{6-1} = \mathbf{\frac{28}{15}\ s^{-1} = 1{,}87\ s^{-1}}$$

<u>Закон промјене убрзања</u>

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 6t + 8) = 2t - 6$$

$$\left.\begin{aligned} a_t &= R\varepsilon \\ a_n &= R\omega^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \mathbf{3}\sqrt{(\mathbf{2t - 6})^2 + (\mathbf{t^2 - 6t + 8})^4}$$

$$\boldsymbol{a = 3\sqrt{t^8 - 24t^7 + 248t^6 - 1440t^5 + 5136t^4 - 11520t^3 + 15876t^2 - 12312t + 4132}}$$

<u>Провјерити да ли је могуће да интензитет брзине у два различита тренутка износи 72 km/h</u>

$$72\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\ \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 20\text{ ms}^{-}1$$

$$v = R\omega = 3(t^2 - 6t + 8)$$

$$20 = 3\left({t^{\#}}^2 - 6t^{\#} + 8\right)$$

$$3{t^{\#}}^2 - 18t^{\#} + 4 = 0$$

$$t_{1-2}^{\#} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 48}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{276}}{6} = \begin{cases} t_1^{\#} = 0{,}231 \\ t_2^{\#} = 5{,}769 \end{cases}$$

Оба временска тренутка су позитивна, што значи да брзина може имати наведену вриједност у два различита временска тренутка.