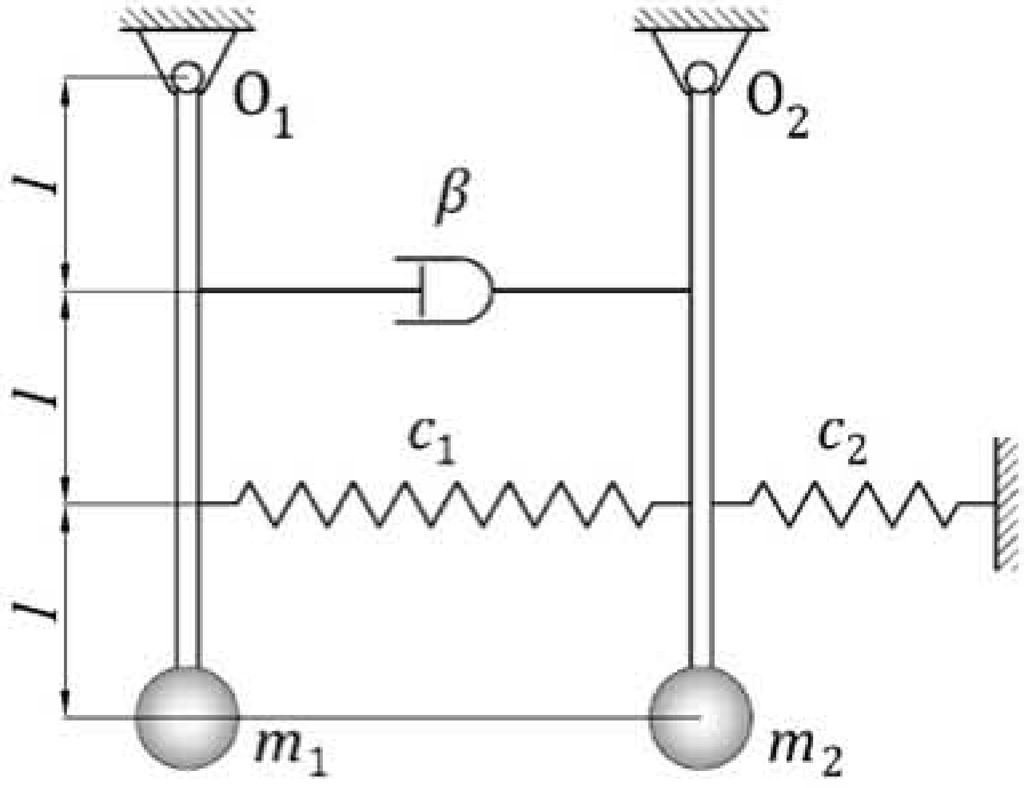
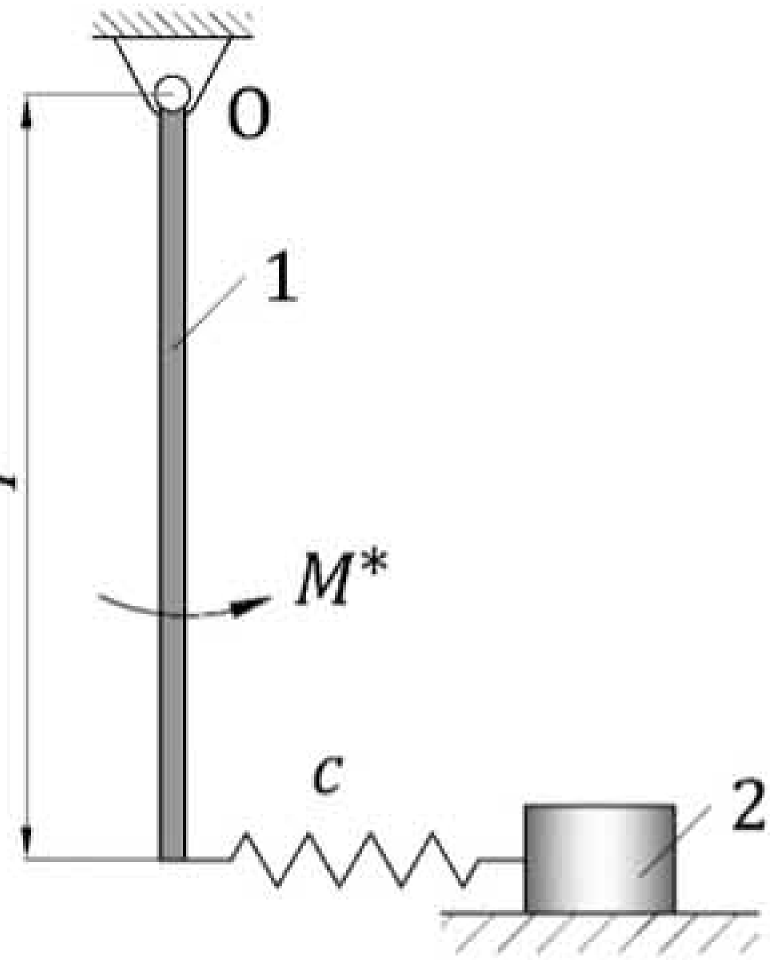
ОСЦИЛАЦИЈЕ У МАШИНСТВУ – ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ

1. Осцилаторни систем састоји се од два лака штапа, који могу да се обрћу у вертикалној равни, на чијим су доњим крајевима круто везане концентрисане масе. Слика приказује равнотежни положај осцилаторног система, који одржавају опруге крутости c_1 и c_2. Ако је $m_1 = m_2 = cl/g$ и $c_1 = c_2 = c$,



- написати систем диференцијалних једначина слободних пригушених осцилација посматраног система, а потом
- карактеристичну једначину датог система.

2. Систем, приказан на слици, састоји се од хомогеног крутог штапа 1, масе $m_1 = 3m$ и дужине l, и тијела 2, масе $m_2 = m$. Штап 1 може да се обрће у вертикалној равни око тачке O, док тијело 2 може да клизи по глаткој хоризонталној подлози. Штап 1 и тијело 2 су међусобно везани опругом крутости c, док на штап 1 дјелује принудни момент M^* чији се интензитет мијења према закону $M^* = M_0 \sin \Omega t$.



- Написати диференцијалне једначине принудних осцилација посматраног система.
- Одредити кружне фреквенције слободних осцилација система.
- Формирати модалну матрицу система.
- Написати општу једначину осциловања система око равнотежног положаја.

Дато је:

$$\frac{c}{m} = 1155{,}24\ \mathrm{s}^{-2},\ \ mg = \frac{2}{3}cl, \quad l = 0{,}62\ \mathrm{m}, \quad M_0 = 5cl^2\ [\mathrm{Nm}],\ \Omega = \sqrt{\frac{4c}{m}}\ [\mathrm{s}^{-1}].$$

Осцилације

2. колоквијум

(1) $E_k = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2$

$J_1 = m_1 (3l)^2 = 9 m_1 l^2$ $\qquad a_{11} = 9 m_1 l^2$

$J_2 = 9 m_2 l^2$ $\qquad a_{12} = 0$

$\qquad a_{22} = 9 m_2 l^2$

$\Phi = \frac{1}{2} \beta \cdot \Delta x^2 = \frac{1}{2} \beta \cdot (l \dot{\varphi}_1 - l \dot{\varphi}_2)^2$ $\qquad b_{11} = \beta l^2$

$= \frac{1}{2} \beta (l^2 \dot{\varphi}_1^2 - 2 l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l^2 \dot{\varphi}_2^2)$ $\qquad b_{12} = -\beta l^2$

$\qquad b_{22} = \beta l^2$

$$E_p = -m_1 g \cdot 3l \underbrace{\cos\varphi_1}_{1-\frac{\varphi_1^2}{2}} - m_2 g 3l \underbrace{\cos\varphi_2}_{1-\frac{\varphi_2^2}{2}} + \frac{1}{2} c_1 (2l\varphi_1 - 2l\varphi_2)^2 + \frac{1}{2} c_2 (2l\varphi_2)^2$$

$\frac{dE_p}{d\varphi_1} = 3 m_1 g l \varphi_1 + c_1 2l (2l\varphi_1 - 2l\varphi_2)$

$\frac{d^2E_p}{d\varphi_1^2} = 3 m_1 g l + 4 c_1 l^2$ $\qquad c_{11} = 7cl^2$

$\frac{d^2E_p}{d\varphi_1 d\varphi_2} = -4 c_1 l^2$ $\qquad c_{12} = -4cl^2$

$\qquad c_{22} = 11cl^2$

$\frac{dE_p}{d\varphi_2} = 3 m_2 g l \varphi_2 - 2l c_1 (2l\varphi_1 - 2l\varphi_2) + 2l c_2 (2l\varphi_2)$

$\frac{d^2E_p}{d\varphi_2^2} = 3 m_2 g l + 4 c_1 l^2 + 4 l^2 c_2$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11} + \lambda b_{11} + \lambda^2 a_{11} & c_{12} + \lambda b_{12} + \lambda^2 \cancel{a_{12}}^{\,0} \\ c_{21} + \lambda b_{21} + \cancel{\lambda^2 a_{21}}^{\,0} & c_{22} + \lambda b_{22} + \lambda^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_4 \lambda^4 + A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0$$

$A_4 = a_{11} a_{22} = 81 m^2 l^4$

$A_3 = b_{11} a_{22} + a_{11} b_{22} = \beta l^2 9ml^2 + 9ml^2 \beta l^2 = 18 m l^4 \beta$

$A_2 = a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11} + b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = 9ml^2 11cl^2 + 9ml^2 7cl^2 = 162 m l^4 c$

$A_1 = b_{11} c_{22} + b_{22} c_{11} - 2b_{12} c_{21} = \beta l^2 \cdot 11cl^2 + \beta l^2 7cl^2 - 2\beta l^2 4cl^2 = 10cl^4\beta$

$A_0 = c_{11} c_{22} - c_{12}^2 = 77c^2l^4 - 16c^2l^4 = 61c^2l^4$

(2) $E_k = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

$J = \frac{m_1 \cdot l^2}{3} = ml^2$

$a_{11} = ml^2$

$a_{12} = 0$

$a_{22} = m$

$E_p = -m_1 g \cdot \frac{l}{2} \overset{1-\frac{\varphi^2}{2}}{\cos\varphi} + \frac{1}{2} c \cdot (l\varphi - x)^2$

$\frac{dE_p}{d\varphi} = \frac{3}{2} mgl\varphi + cl(l\varphi - x)$

$c_{11} = 2cl^2$

$c_{12} = -cl$

$c_{22} = c$

$\frac{d^2E_p}{d\varphi^2} = \frac{3}{2} mgl + cl^2$

$\frac{d^2E_p}{d\varphi dx} = -cl$

$\frac{dE_p}{dx} = -c(l\varphi - x) \qquad \frac{d^2E_p}{dx^2} = c$

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - \cancel{a_{12}\omega^2}^{\,0} \\ c_{21} - \cancel{a_{21}\omega^2}^{\,0} & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$A = a_{11} a_{22} = m^2 l^2$

$B = -c_{11}a_{22} - a_{11}c_{22} = -2cl^2 m - ml^2 c = -3ml^2 c$

$C = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 2cl^2 c - c^2 l^2 = c^2 l^2$

$$\frac{3ml^2c \pm \sqrt{9m^2l^4c^2 - 4m^2l^2 \cdot c^2l^2}}{2m^2l^2} = \frac{(3 \pm \sqrt{5})ml^2c}{2m^2l^2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{c}{m}$$

$\omega_1 = 21 \ rad/s \qquad \omega_2 = 55 \ rad/s$

$$\mu_{21} = \frac{c_{11} - a_{11}\omega^2}{-c_{12}} = \frac{2cl^2 - ml^2 \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \frac{c}{m}}{+cl} = \left(2 - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) l = \begin{cases} 1 \\ -938 \end{cases}$$

$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\Omega^2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - a_{22}\Omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2cl^2 - ml^2 \frac{4c}{m} & -cl \\ -cl & c - m\frac{4c}{m} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2cl^2 & -cl \\ -cl & -3c \end{vmatrix} = 6c^2l^2 - c^2l^2 = 5c^2l^2$$

$$P_1 = \frac{\begin{vmatrix} M_0 & c_{12} - \cancelto{0}{a_{12}\Omega^2} \\ 0 & c_{22} - a_{22}\Omega^2 \end{vmatrix}}{5c^2l^2} = \frac{\begin{vmatrix} 5cl^2 & -cl \\ 0 & c - m\frac{4c}{m} \end{vmatrix}}{5c^2l^2} = \frac{-15c^2l^2}{5c^2l^2} = -3_{\text{rad}},$$

$$P_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\Omega^2 & M_0 \\ c_{21} - \cancelto{0}{a_{21}\Omega^2} & 0 \end{vmatrix}}{5c^2l^2} = \frac{\begin{vmatrix} 2cl^2 - ml^2\frac{4c}{m} & 5cl^2 \\ -cl & 0 \end{vmatrix}}{5c^2l^2} = l\ [m]$$