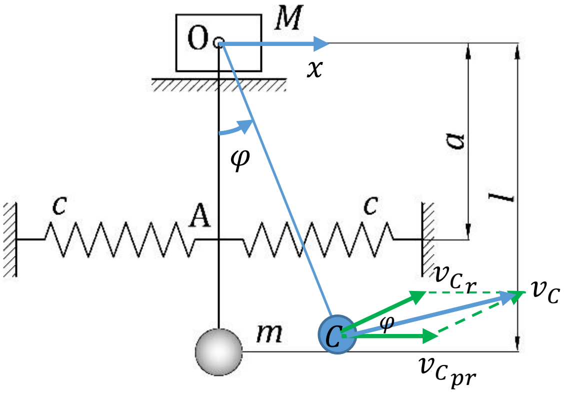
**ОСЦИЛАЦИЈЕ У МАШИНСТВУ**

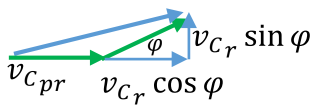
СИСТЕМИ СА ДВА СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial E_k}{\partial q^i} + \frac{\partial E_p}{\partial q^i} = 0$$

СЛОБОДНЕ НЕПРИГУШЕНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

Терет масе $M$ креће се по глаткој хоризонталној равни. За терет је у тачки $O$ објешено математичко клатно масе $m$ и дужине $l$. За клатно су у тачки A причвршћене двије опруге једнаке крутости $c$. Написати диференцијалне једначине малих осцилација система око равнотежног положаја, а потом фреквентну једначину.




$$E_k = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2}$$

Брзина масе $m$ у отклоњеном положају је:

$$v_C = \sqrt{\left(v_{C_{pr}} + v_{C_r}\cos\varphi\right)^2 + \left(v_{C_r}\sin\varphi\right)^2}$$

Нама је потребна кинетичка енергија при проласку система кроз равнотежни положај. У равнотежном положају је $\varphi = 0$, па добијамо:

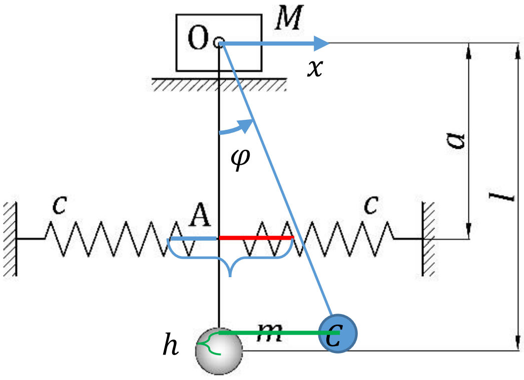
$$v_C = \sqrt{\left(v_{C_{pr}} + v_{C_r}\cos 0\right)^2 + \left(v_{C_r}\sin 0\right)^2} = v_{C_{pr}} + v_{C_r}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{C_{pr}} &= \dot{x} \\ v_{C_r} &= l\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_C = \dot{x} + l\dot{\varphi}$$

$$E_k = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2} = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x} + l\dot{\varphi})^2 = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2)$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left[\underbrace{(M+m)}_{a_{11}}\dot{x}^2 + 2\underbrace{ml}_{a_{12}}\dot{x}\dot{\varphi} + \underbrace{ml^2}_{a_{22}}\dot{\varphi}^2\right]$$

$$E_k \approx \frac{1}{2}\left(a_{11}{\dot{q}_1}^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}{\dot{q}_2}^2\right)$$




$$h = l - l\cos\varphi = l(1-\cos\varphi) \approx l\left(1-\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\right) = l\left(1-1+\frac{\varphi^2}{2}\right) = \frac{l}{2}\varphi^2$$

$$E_p = +mgh + \frac{1}{2}c(x+a\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2}c(x+a\sin\varphi)^2 = mg\frac{l}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}2c(x+a\varphi)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}[mgl\varphi^2 + 2c(x^2+2ax\varphi+a^2\varphi^2)] = \frac{1}{2}(mgl\varphi^2 + 2cx^2 + 2\cdot 2cax\varphi + 2ca^2\varphi^2)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[\underbrace{2c}_{c_{11}}x^2 + 2\cdot\underbrace{2ca}_{c_{12}}x\varphi + \underbrace{(mgl+2ca^2)}_{c_{22}}\varphi^2\right]$$

$$E_p \approx \frac{1}{2}(c_{11}{q_1}^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}{q_2}^2)$$

Систем диференцијалних једначина осциловања

$$\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 2ca \\ 2ca & mgl+2ca^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Фреквентна једначина

$$\begin{vmatrix} 2c-(M+m)\omega^2 & 2ca-ml\omega^2 \\ 2ca-ml\omega^2 & mgl+2ca^2-ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[2c-(M+m)\omega^2][mgl+2ca^2-ml^2\omega^2] - (2ca-ml\omega^2) = 0$$

# СЛОБОДНЕ ПРИГУШЕНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

- Матрична једначина слободних пригушених осцилација система са два степена слободе:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{0\}$$

$$E_k \approx \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1{}^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2{}^2\right)$$

$$E_p \approx \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1{}^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2{}^2\right)$$

- Дисипативна функција:

$$\Phi \approx \frac{1}{2}\left(b_{11}\dot{q}_1{}^2 + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2{}^2\right)$$

- Претпостављени облик рјешења:

$$q_1 = D_1 e^{\lambda t}$$
$$q_2 = D_2 e^{\lambda t}$$

- Уврштавањем претпостављеног рјешења у претходну једначину, систем од двије диференцијалне једначине сводимо на систем од двије алгебарске једначине:

$$(c_{11} + b_{11}\lambda + a_{11}\lambda^2)D_1 + (c_{12} + b_{12}\lambda + a_{12}\lambda^2)D_2 = 0$$
$$(c_{21} + b_{21}\lambda + a_{21}\lambda^2)D_1 + (c_{22} + b_{22}\lambda + a_{22}\lambda^2)D_2 = 0$$

- Карактеристична једначина:

$$\begin{vmatrix} c_{11} + b_{11}\lambda + a_{11}\lambda^2 & c_{12} + b_{12}\lambda + a_{12}\lambda^2 \\ c_{12} + b_{12}\lambda + a_{12}\lambda^2 & c_{22} + b_{22}\lambda + a_{22}\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$
$$A_4\lambda^4 + A_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0$$

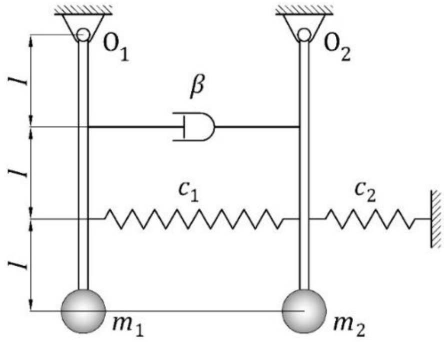
- Да би равнотежни положај система био асимптотски стабилан, морају бити испуњени услови Раут-Хурвицовог критеријума, при којима су реални дијелови коријена претходне једначине негативни:

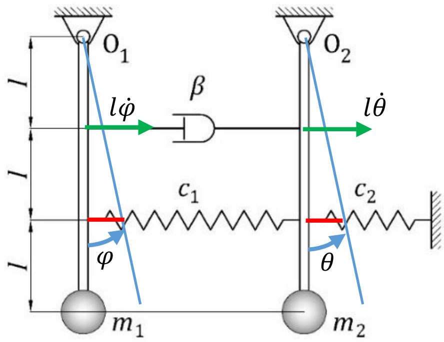
$$A_4 > 0, A_3 > 0, A_2 > 0, A_1 > 0, A_0 > 0$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_3 & A_4 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_0 & A_1 \end{vmatrix} > 0$$

- Када су испуњени услови Раут-Хурвицовог критеријума дисипација је потпуна. Тада су могући сљедећи случајеви:
  - случај малог пригушења:
  $$\begin{matrix} \lambda_{1,2} = -n_1 \pm ip_1 \\ \lambda_{3,4} = -n_2 \pm ip_2 \end{matrix} ; n_1, n_2, p_1, p_2 > 0$$
  - случај великог пригушења:
  $$\lambda_i = -n_i ; n_i > 0$$
  - мјешовити случај:
  $$\begin{matrix} \lambda_{1,2} = -n_1 \pm ip_1 \\ \lambda_3 = -n_3 \\ \lambda_4 = -n_4 \end{matrix} ; n_1, p_1, n_3, n_4 > 0$$

Осцилаторни систем састоји се од два лака штапа, који могу да се обрћу у вертикалној равни, на чијим су доњим крајевима круто везане концентрисане масе. Написати систем диференцијалних једначина слободних пригушених осцилација, а потом карактеристичну једначину датог система.

Дато је: $m_1 = m_2 = cl/g$ и $c_1 = c_2 = c$.




$$E_k = \frac{m_1(3l\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{m_2\left(3l\dot{\theta}\right)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{9m_1l^2}_{a_{11}}\dot{\varphi}^2 + \underbrace{9m_2l^2}_{a_{22}}\dot{\theta}^2\right)$$

$$E_p = m_1g(3l - 3l\cos\varphi) + m_2g(3l - 3l\cos\theta) + \frac{1}{2}c_1(2l\theta - 2l\varphi)^2 + \frac{1}{2}c_2(2l\theta)^2$$

$$E_p = 3m_1gl\frac{\varphi^2}{2} + 3m_2gl\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}c_1(4l^2\varphi^2 - 2\cdot 4l^2\varphi\theta + 4l^2\theta^2) + \frac{1}{2}4c_2l^2\theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[\underbrace{(3m_1gl + 4c_1l^2)}_{c_{11}}\varphi^2 - 2\cdot\underbrace{4c_1l^2}_{-c_{12}}\varphi\theta + \underbrace{(3m_2gl + 4c_1l^2 + 4c_2l^2)}_{c_{22}}\theta^2\right]$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta v_r^2 = \frac{1}{2}\beta\left(l\dot{\theta} - l\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\beta l^2}_{b_{11}}\dot{\varphi}^2 - 2\underbrace{\beta l^2}_{-b_{12}}\dot{\varphi}\dot{\theta} + \underbrace{\beta l^2}_{b_{22}}\dot{\theta}^2\right)$$

$$\begin{bmatrix} 9m_1l^2 & 0 \\ 0 & 9m_2l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta l^2 & -\beta l^2 \\ -\beta l^2 & \beta l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 3m_1gl + 4c_1l^2 & -4c_1l^2 \\ -4c_1l^2 & 3m_2gl + 4c_1l^2 + 4c_2l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9\dfrac{cl^3}{g} & 0 \\ 0 & 9\dfrac{cl^3}{g} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta l^2 & -\beta l^2 \\ -\beta l^2 & \beta l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 7cl^2 & -4cl^2 \\ -4cl^2 & 11cl^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7cl^2 + \beta l^2\lambda + 9\dfrac{cl^3}{g}\lambda^2 & -4cl^2 - \beta l^2\lambda \\ -4cl^2 - \beta l^2\lambda & 11cl^2 + \beta l^2\lambda + 9\dfrac{cl^3}{g}\lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$