ОСЦИЛАЦИЈЕ У МАШИНСТВУ

СИСТЕМИ СА ДВА СТЕПЕНА СЛОБОДЕ

ПРИНУДНЕ НЕПРИГУШЕНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

Разматрамо само случајеве у којима на систем дјелује проста принудна сила

$$Q^* = Q_0 \sin \Omega t$$

Опште рјешење нехомогеног система линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима:

$$q_1 = q_{1h} + q_{1p}$$
$$q_2 = q_{2h} + q_{2p}$$

Парцијална рјешења се траже у облику:

$$q_{1p} = P_1 \sin \Omega t$$
$$q_{2p} = P_2 \sin \Omega t$$

Систем диференцијалних једначина записан у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{01} \sin \Omega t \\ Q_{02} \sin \Omega t \end{Bmatrix}$$

Уврштавањем претпостављених парцијалних рјешења у претходну једначину, систем од двије диференцијалне једначине сводимо на систем од двије алгебарске једначине:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -P_1 \Omega^2 \sin \Omega t \\ -P_2 \Omega^2 \sin \Omega t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \sin \Omega t \\ P_2 \sin \Omega t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{01} \sin \Omega t \\ Q_{02} \sin \Omega t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -P_1 \Omega^2 \\ -P_2 \Omega^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{01} \\ Q_{02} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a_{11}\Omega^2 & -a_{12}\Omega^2 \\ -a_{21}\Omega^2 & -a_{22}\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{01} \\ Q_{02} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} - a_{11}\Omega^2 & c_{12} - a_{12}\Omega^2 \\ c_{21} - a_{21}\Omega^2 & c_{22} - a_{22}\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{01} \\ Q_{02} \end{Bmatrix}$$

$$(c_{11} - a_{11}\Omega^2)P_1 + (c_{12} - a_{12}\Omega^2)P_2 = Q_{01}$$
$$(c_{21} - a_{21}\Omega^2)P_1 + (c_{22} - a_{22}\Omega^2)P_2 = Q_{02}$$

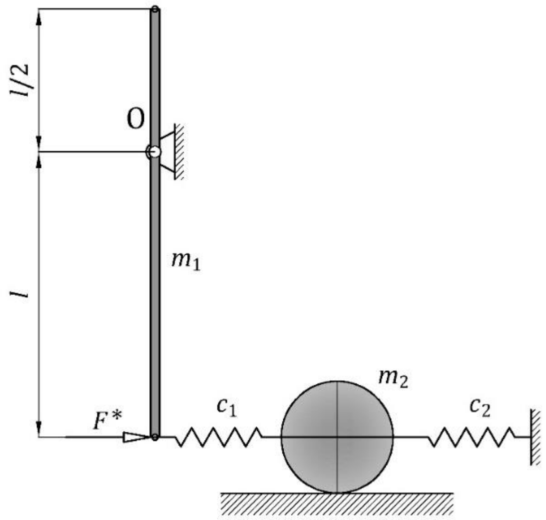
Примјеном Крамеровог правила добија се:

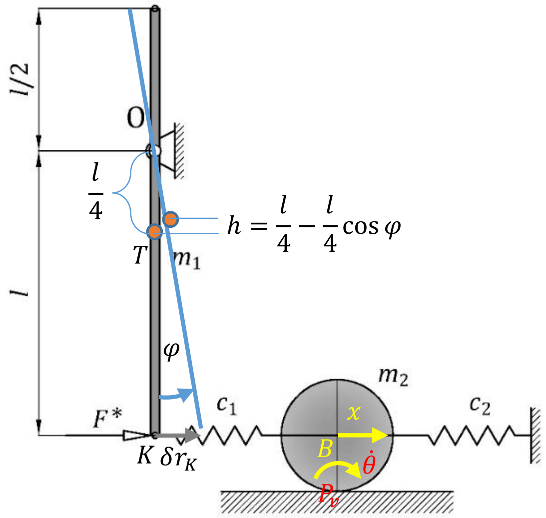
$$P_1 = \frac{\begin{vmatrix} Q_{01} & c_{12} - a_{12}\Omega^2 \\ Q_{02} & c_{22} - a_{22}\Omega^2 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega^2)}, \qquad P_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\Omega^2 & Q_{01} \\ c_{21} - a_{21}\Omega^2 & Q_{02} \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega^2)}$$

$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\Omega^2 & c_{12} - a_{12}\Omega^2 \\ c_{21} - a_{21}\Omega^2 & c_{22} - a_{22}\Omega^2 \end{vmatrix}$$

ЗАДАТАК

Систем, приказан на слици, састоји се од хомогеног крутог штапа, масе $m_1 = 4m$ и дужине $3l/2$, и хомогеног кружног диска, масе $m_2 = 2m$ и полупречника r. Штап може да се обрће у вертикалној равни око осе O, док диск може да се котрља без клизања по хоризонталној подлози. На штап дјелује принудна сила F^* чији се интензитет мијења према закону $F^* = mg/3 \sin\sqrt{g/l}\,t$. Написати диференцијалне једначине принудних осцилација. Одредити кружне фреквенције слободних осцилација система и амплитуде принудних осцилација. Написати опште једначине осциловања система око равнотежног положаја. Дато је: $c_1 = 2c$, $c_2 = c = 4mg/l$.





$$q_1 = \varphi, \qquad q_2 = x$$

$$E_k = \frac{I_O\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}^2}{2} + \frac{I_B\dot{\theta}^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} v_B &= \overline{BP_v}\dot{\theta} = r\dot{\theta} \\ v_B &= \dot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r\dot{\theta} = \dot{x} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{r}$$

$$I_O = I_T + m_1\overline{TO}^2 = \frac{m_1\left(\frac{3}{2}l\right)^2}{12} + m_1\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{3m_1l^2}{16} + \frac{m_1l^2}{16} = \frac{m_1l^2}{4} = \frac{4ml^2}{4} = ml^2$$

$$I_B = \frac{m_2r^2}{2} = \frac{2mr^2}{2} = mr^2$$

$$E_k = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{2m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{3m\dot{x}^2}{2}$$

$$\boxed{a_{11} = ml^2, \qquad a_{12} = 0, \qquad a_{22} = 3m}$$

$$E_p = +m_1gh + \frac{1}{2}c_1(l\sin\varphi - x)^2 + \frac{1}{2}c_2x^2$$

$$E_p = 4mg\frac{l}{4}(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}2c(l\sin\varphi - x)^2 + \frac{1}{2}cx^2$$

$$E_p \approx mgl\left(1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2}\right) + \frac{1}{2}2\frac{4mg}{l}(l\varphi - x)^2 + \frac{1}{2}\frac{4mg}{l}x^2$$

$$E_p \approx \frac{1}{2}mgl\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{8mg}{l}(l^2\varphi^2 - 2l\varphi x + x^2) + \frac{1}{2}\frac{4mg}{l}x^2$$

$$E_p \approx \frac{1}{2}\left(9mgl\varphi^2 - 2\cdot 8mg\varphi x + \frac{12mg}{l}x^2\right)$$

$$\boxed{c_{11} = 9mgl, \qquad c_{12} = -8mg, \qquad c_{22} = \frac{12mg}{l}}$$

$$\delta A^* = \vec{F}^*\cdot\delta\vec{r}_K = F^*\delta r_K\cos 0 = F^*\delta r_K = \frac{mg}{3}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\delta r_K = \frac{mg}{3}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)l\delta\varphi$$

$$\boxed{Q_{01} = \frac{mgl}{3}, \qquad Q_{02} = 0}$$

Диференцијалне једначине принудних осцилација

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{01}\sin\Omega t \\ Q_{02}\sin\Omega t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 9mgl & -8mg \\ -8mg & \frac{12mg}{l} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{mgl}{3}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Кружне фреквенције слободних осцилација система

$$\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}\omega^2 & c_{12}-a_{12}\omega^2 \\ c_{21}-a_{21}\omega^2 & c_{22}-a_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 9mgl-ml^2\omega^2 & -8mg \\ -8mg & \dfrac{12mg}{l}-3m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(9mgl-ml^2\omega^2)\left(\frac{12mg}{l}-3m\omega^2\right)-64m^2g^2 = 0$$

$$108m^2g^2-27m^2gl\omega^2-12m^2gl\omega^2+3m^2l^2\omega^4-64m^2g^2 = 0$$

$$3m^2l^2\omega^4-39m^2gl\omega^2+44m^2g^2 = 0$$

$$3l^2\omega^4-39gl\omega^2+44g^2 = 0$$

$$\omega^2 = k$$

$$3l^2k^2-39glk+44g^2 = 0$$

$$k_{1/2} = \frac{39gl \pm \sqrt{1521g^2l^2-528g^2l^2}}{6l^2} = \frac{39gl \pm 31{,}51gl}{6l^2} = \begin{cases} k_1 = 1{,}248\dfrac{g}{l} \\ k_2 = 11{,}75\dfrac{g}{l} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 1{,}248\dfrac{g}{l} \Rightarrow \omega_1 = 1{,}12\sqrt{\dfrac{g}{l}} \\ k_2 = 11{,}75\dfrac{g}{l} \Rightarrow \omega_2 = 3{,}43\sqrt{\dfrac{g}{l}} \end{cases}$$

Амплитуде принудних осцилација

$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}\Omega^2 & c_{12}-a_{12}\Omega^2 \\ c_{21}-a_{21}\Omega^2 & c_{22}-a_{22}\Omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9mgl-ml^2\dfrac{g}{l} & -8mg \\ -8mg & \dfrac{12mg}{l}-3m\dfrac{g}{l} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} 8mgl & -8mg \\ -8mg & \dfrac{9mg}{l} \end{vmatrix} = 72m^2g^2-64m^2g^2 = 8m^2g^2$$

$$\boldsymbol{P_1} = \frac{\begin{vmatrix} Q_{01} & c_{12}-a_{12}\Omega^2 \\ Q_{02} & c_{22}-a_{22}\Omega^2 \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega^2)} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{mgl}{3} & -8mg \\ 0 & \dfrac{9mg}{l} \end{vmatrix}}{8m^2g^2} = \frac{3m^2g^2}{8m^2g^2} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

$$\boldsymbol{P_2} = \frac{\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}\Omega^2 & Q_{01} \\ c_{21}-a_{21}\Omega^2 & Q_{02} \end{vmatrix}}{\Delta(\Omega^2)} = \frac{\begin{vmatrix} 8mgl & \dfrac{mgl}{3} \\ -8mg & 0 \end{vmatrix}}{8m^2g^2} = \frac{\frac{8}{3}m^2g^2l}{8m^2g^2} = \boldsymbol{\frac{l}{3}}$$

Опште једначине осциловања система око равнотежног положаја

$$q_1 = q_{1h} + q_{1p} \qquad \varphi = \varphi_h + \varphi_p$$
$$q_2 = q_{2h} + q_{2p}' \qquad x = x_h + x_p$$

$$\varphi_1 = A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad \varphi_2 = A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$x_1 = \eta_1 A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad x_2 = \eta_2 A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$\eta = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega^2}{c_{12} - a_{12}\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 = -\dfrac{c_{11} - a_{11}\omega_1^2}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2} = -\dfrac{9mgl - ml^2 \cdot 1{,}248\dfrac{g}{l}}{-8mg} = 0{,}97l \\ \eta_2 = -\dfrac{c_{11} - a_{11}\omega_2^2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2} = -\dfrac{9mgl - ml^2 \cdot 11{,}75\dfrac{g}{l}}{-8mg} = -0{,}34l \end{cases}$$

$$\varphi_1 = A_1^{(1)} \sin\left(1{,}12\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_1\right) \qquad \varphi_2 = A_1^{(2)} \sin\left(3{,}43\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_2\right)$$
$$x_1 = 0{,}97lA_1^{(1)} \sin\left(1{,}12\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_1\right) \quad x_2 = -0{,}34lA_1^{(2)} \sin\left(3{,}43\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_2\right)$$

$$\varphi_h = A_1^{(1)} \sin\left(1{,}12\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_1\right) + A_1^{(2)} \sin\left(3{,}43\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_2\right)$$

$$x_h = 0{,}97lA_1^{(1)} \sin\left(1{,}12\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_1\right) - 0{,}34lA_1^{(2)} \sin\left(3{,}43\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_2\right)$$

$$\varphi_p = P_1 \sin\Omega t = \frac{3}{8}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$
$$x_p = P_2 \sin\Omega t = \frac{l}{3}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$\boldsymbol{\varphi = A_1^{(1)} \sin\left(1,12\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_1\right) + A_1^{(2)} \sin\left(3,43\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_2\right) + \frac{3}{8}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}$$
$$\boldsymbol{x = 0,97lA_1^{(1)} \sin\left(1,12\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_1\right) - 0,34lA_1^{(2)} \sin\left(3,43\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha_2\right) + \frac{l}{3}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}$$