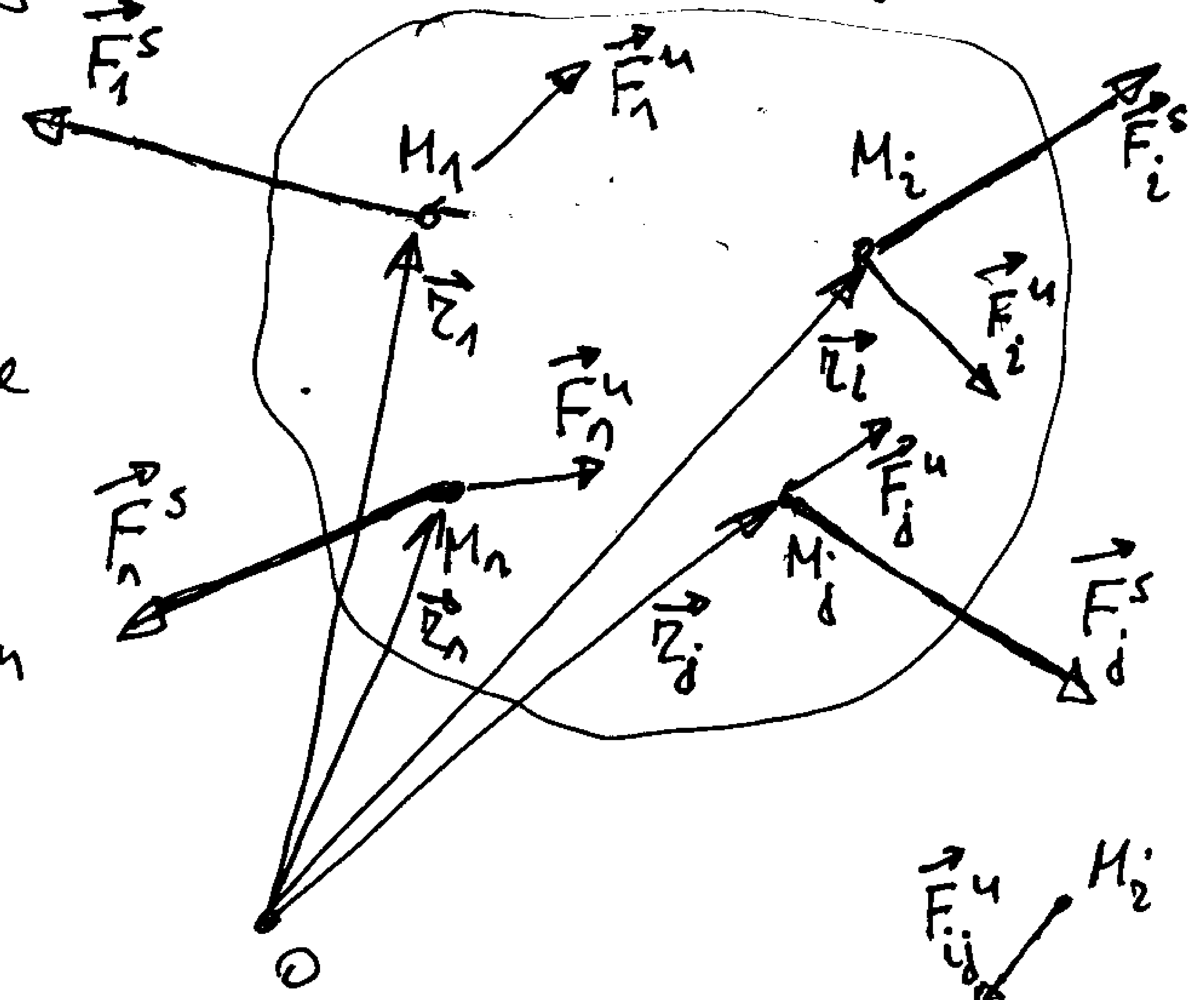
# 5. Dinamika sistema materijalnih tačaka

Sistem materijalnih tačaka čini skup materijalnih tačaka čija su kretanja međuzavisna.

## 5.1 Diferencijalne jednačine kretanja. Osobine unutrašnjih sila.

Posmatrajmo sistem koji čini $n$ materijalnih tačaka $M_1, \dots, M_n$ čije su mase $m_1, \dots, m_n$. Položaji tačaka sistema u proizvoljnom trenutku $t$ su određeni vektorima položaja: $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$.

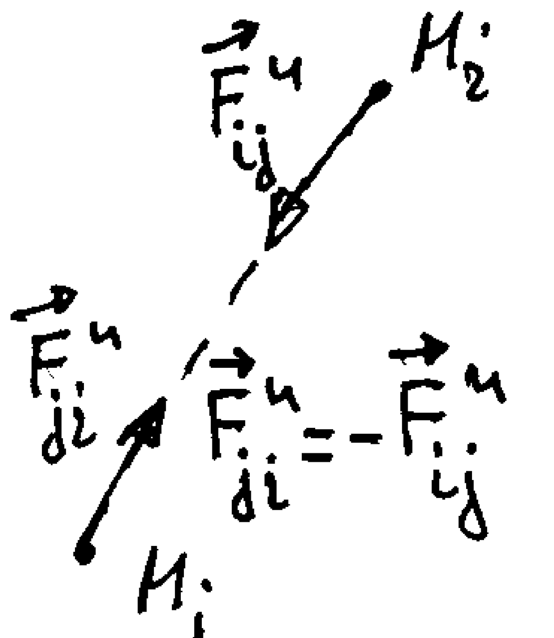



Sile koje djeluju na tačke sistema dijele se na spoljašnje i unutrašnje.

Spoljašnje sile nastaju kao rezultat djelovanja materijalnih objekata koji se nalaze izvan sistema na tačke koje obrazuju sistem.

Unutrašnje sile su rezultat međusobnog dejstva tačaka datog sistema. I jedne, i druge sile mogu u sebi sadržati kako aktivne sile, tako i reakcije veza.

$$\vec{F}_i^u = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}^u$$




$$\vec{F}_{ji}^u = -\vec{F}_{ij}^u$$

Ako sa $\vec{F}_i^s$ označimo rezultantu spoljašnjih sila koje djeluju na $i$-tu tačku, a sa $\vec{F}_i^u$ rezultantu unutrašnjih sila koje djeluju na istu tačku, onda će ta tačka biti izložena dejstvu rezultujuće sile

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u$$

Kretanje svake tačke sistema opisano je osnovnom jednačinom dinamike tačke ($m\vec{a} = \vec{F}$) pa će kretanje datog materijalnog sistema biti opisano sledećim sistemom jednačina:

$$\left.\begin{aligned}
m_1\vec{a}_1 &= \vec{F}_1 = \vec{F}_1^s + \vec{F}_1^u, \\
m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_2 = \vec{F}_2^s + \vec{F}_2^u, \\
&\vdots \\
m_n\vec{a}_n &= \vec{F}_n = \vec{F}_n^s + \vec{F}_n^u,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

gdje su $\vec{a}_1 = \ddot{\vec{r}}_1, \dots, \vec{a}_n = \ddot{\vec{r}}_n$ ubrzanja tačaka sistema.

Jednačine (1) predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja materijalnih tačaka sistema u vektorskom obliku. U principu, njihovim rješavanjem, uz zadate početne uslove, određuje se kretanje svake pojedine tačke sistema. Međutim, ovaj postupak može biti izuzetno složen, naročito kada sistem čini veliki broj tačaka

Osobine unutrašnjih sila.

Pošto unutrašnje sile potiču od uzajamnog dejstva materijalnih tačaka koje pripadaju datom sistemu, a koje se pokoravaju zakonu akcije i reakcije ($\vec{F}_{ji}^u = -\vec{F}_{ij}^u$), to je

1) Vektorski zbir (glavni vektor) svih unutrašnjih sila materijalnog sistema jednak nuli:

$$\vec{F}_R^u = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^u = 0 ; \qquad (2)$$

2) Vektorski zbir momenata (glavni moment) svih unutrašnjih sila materijalnog sistema u odnosu na proizvoljno izabranu tačku O jednak nuli:

$$\vec{M}_O^u = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^u = 0 . \qquad (3)$$

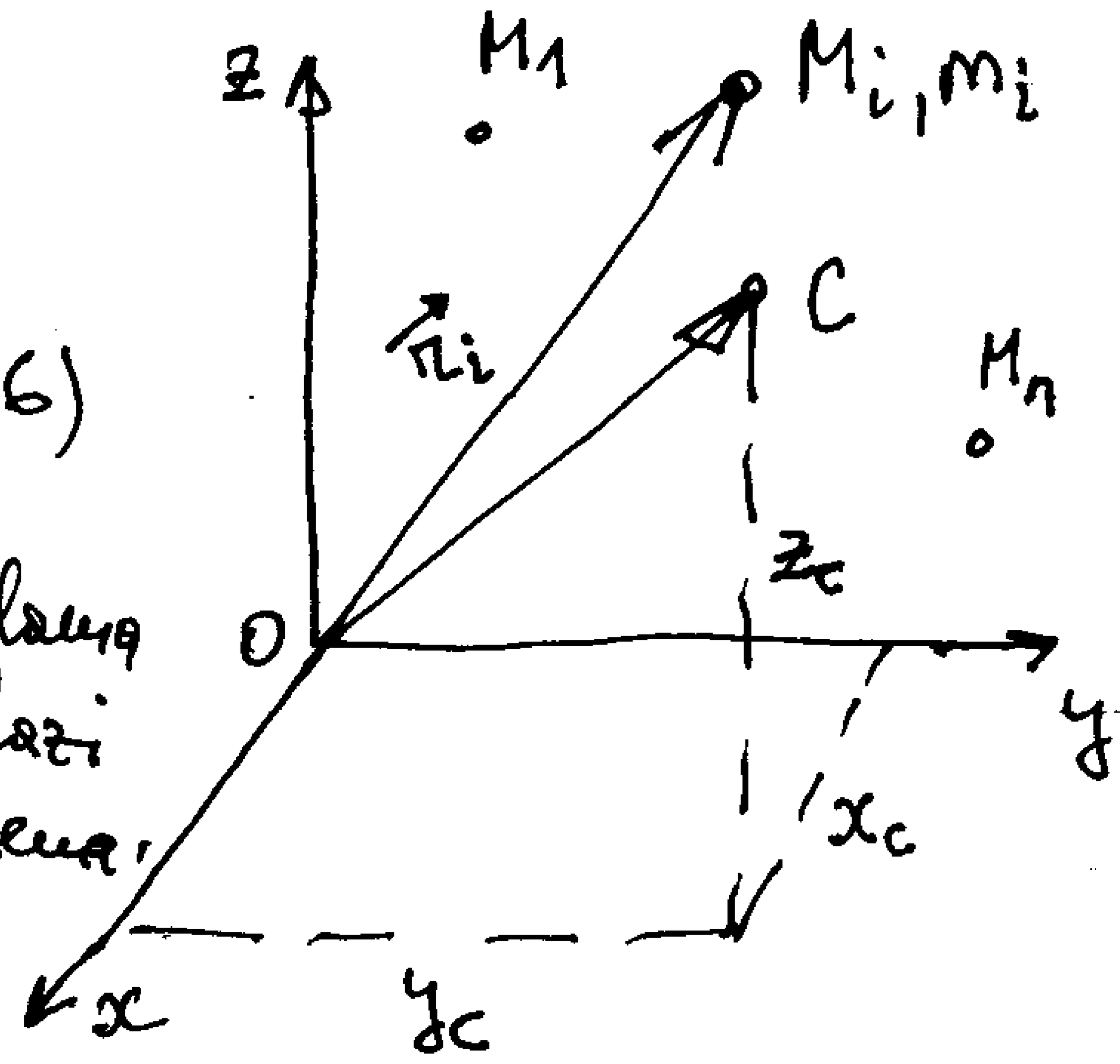
5.2 Masa sistema, centar masa i moment inercije

Pod masom sistema $m$ podrazumijeva se zbir masa $m_i$ svih tačaka sistema

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i . \qquad (4)$$

Centar masa (inercije) je geometrijska tačka C čiji je radijus-vektor određen sljedećom formulom

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m} , \qquad (5)$$




odnosno, čije su Dekartove koordinate

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i , \; y_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i , \; z_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i . \qquad (6)$$

Primijetimo da su formule (5) i (6) analogne formulama za određivanje težišta sistema, tj. kada se sistem nalazi u polju sile teže centar masa se poklapa sa težištem sistema.

Diferenciranjem jednačine (5) dobija se izraz za brzinu centra masa

$$\vec{v}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i , \qquad (7)$$

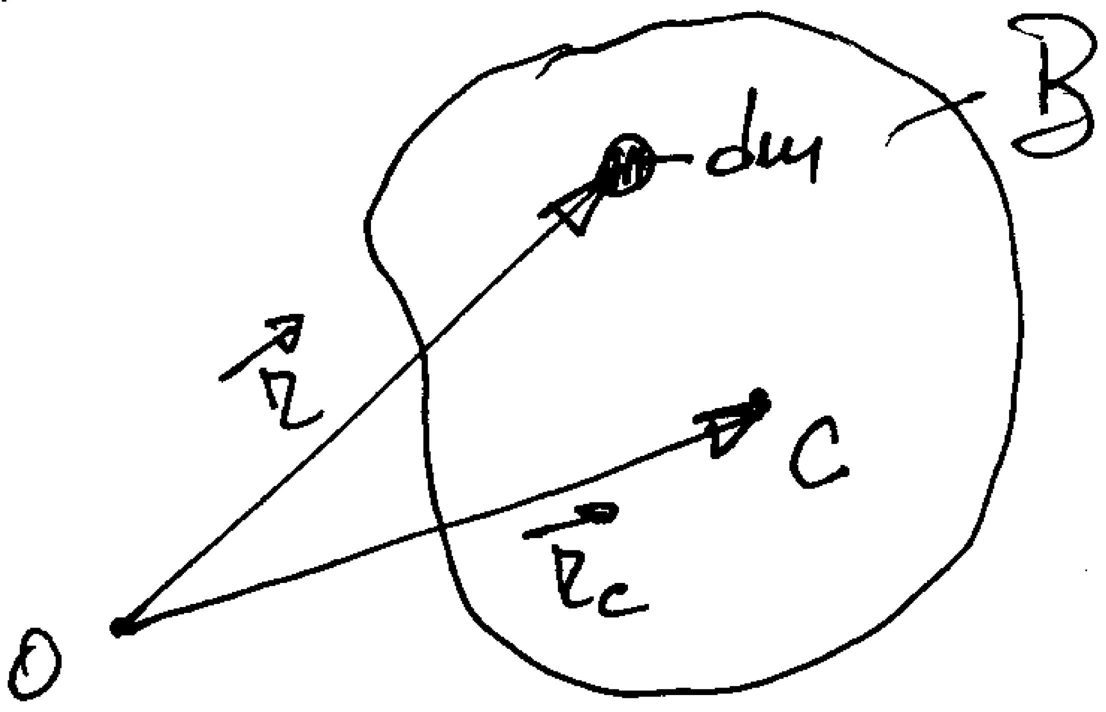
i izraz za ubrzanje centra masa

$$\vec{a}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i , \qquad (8)$$

gdje su $\vec{v}_i$ i $\vec{a}_i$ brzina i ubrzanje tačke $M_i$ sistema.

Napomena. U slučaju krutog tijela čija je masa neprekidno raspoređena, tijelo se dijeli na elementarne djeliće i u graničnom procesu sume u jednačinama (4) i (5) prelaze u integrale po cijeloj oblasti koju zauzima tijelo, tako da će biti

$$M = \int_{(B)} dm, \qquad (9)$$

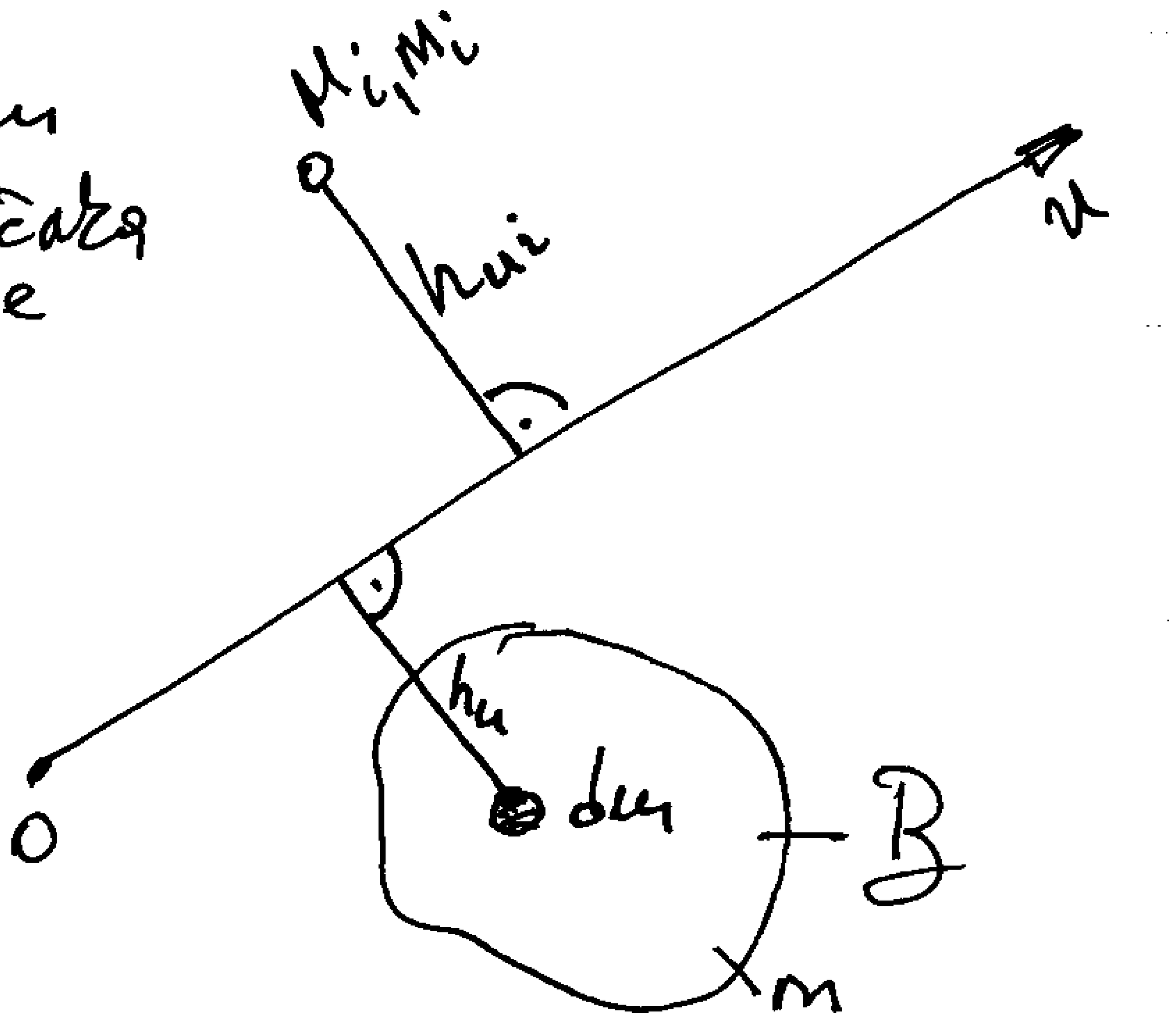



i

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_{(B)} \vec{r}\, dm, \qquad (10)$$

gdje je dm elementarna masa tijela.

Moment inercije materijalnog sistema za neku osu u definiše se zbirom proizvoda masa tačaka sistema i kvadrata njihovih rastojanja od te ose




$$J_u = \sum_{i=1}^{n} m_i h_{ui}^2. \qquad (11)$$

U slučaju tijela je

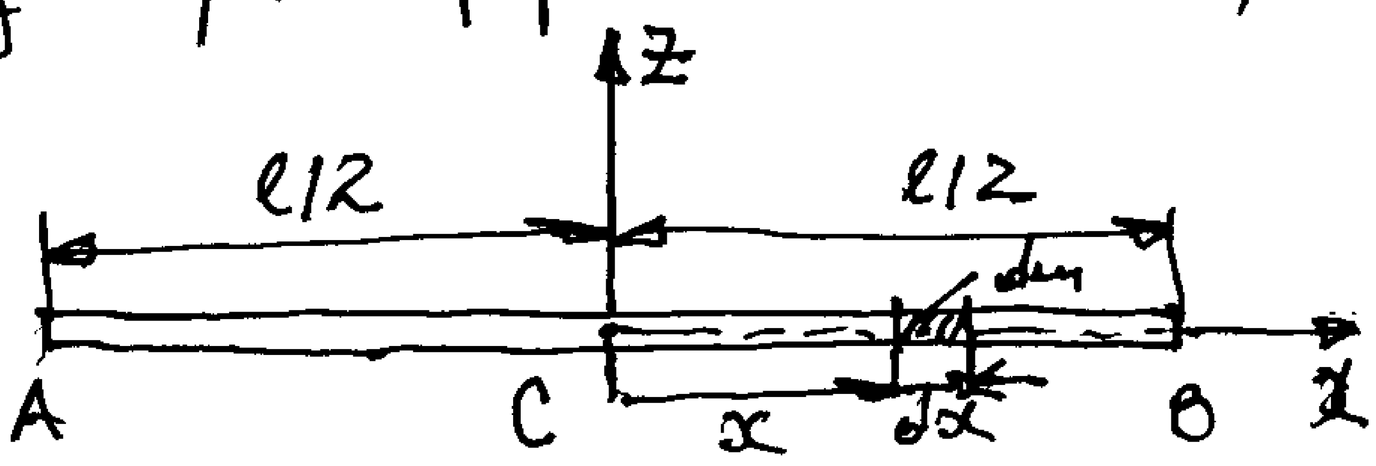
$$J_u = \int_{(B)} h_u^2\, dm. \qquad (12)$$

Jedinica mjere za moment inercije je $kgm^2$.

Poluprečnik inercije sistema (tijela) za osu u je veličina $i_u$ određena formulom

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{M}} \qquad (13)$$

Primjer 1. Moment inercije tankog homogenog štapa, mase M i dužine l, za poprečnu centralnu osu.

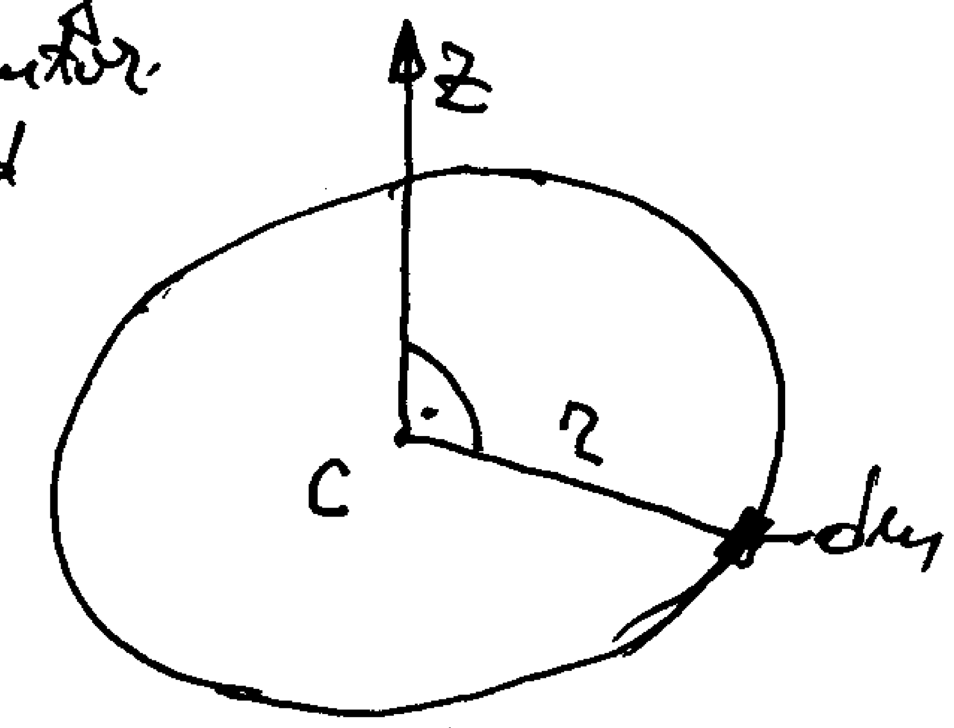



Za proizvoljni elementarni djelić štapa je $dm = \rho_1 dx$, gdje je $\rho_1 = \frac{M}{l}$ masa jedinice dužine štapa. Prema formuli (12) je

$$J_z = \int_{(AB)} h_z^2\, dm = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{ml^2}{12}.$$

$$J_z = \frac{ml^2}{12} \qquad (14)$$

Primjer 2. Tanka homogena kružna žica mase m i poluprečnika r.
Odredimo moment inercije ovog tijela za osu Cz, koja je upravna na ravan žice i koja prolazi kroz njen centar.
Pošto se svaki djelić žice nalazi na istom rastojanju od z-ose, jednakom poluprečniku kružnice r, biće

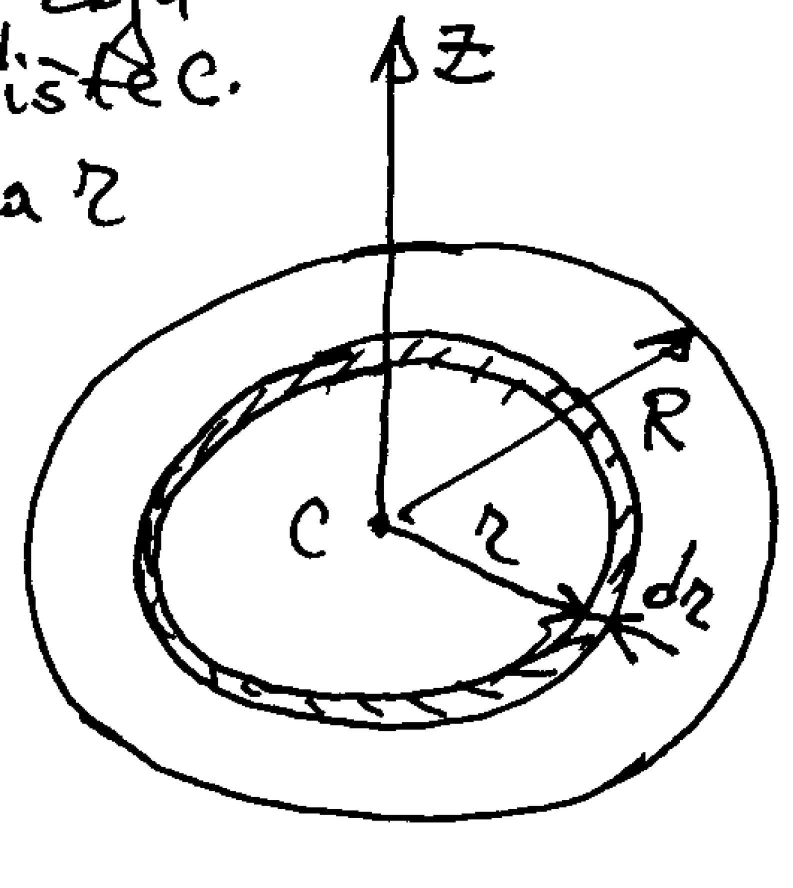



$$J_z = \int_{(B)} h_z^2\, dm = \int_{(B)} r^2\, dm = r^2 \int_{(B)} dm,$$

tj.

$$J_z = m r^2. \qquad (15)$$

Primjer 3. Kružna homogena ploča (disk) mase m i poluprečnika R.
Odredimo moment inercije ploče za osu Cz koja je upravna na ravan ploče i prolazi kroz njeno središte C.
Uočimo u ploči elementarni prsten poluprečnika r i elementarne širine dr. Njegova površina je $2r\pi\, dr$, a masa smještena na njemu $dm = \rho_2\, 2r\pi\, dr$, gdje je $\rho_2 = m/R^2\pi$ masa jedinice površine ploče.

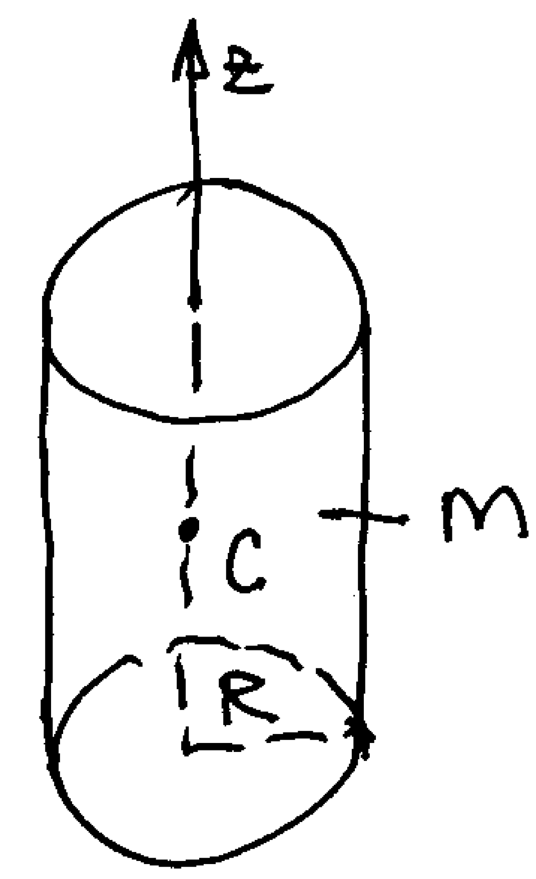



Na osnovu (15), za elementarni prsten je

$$dJ_z = J_z(dm) = r^2 dm = \frac{2m}{R^2} r^3 dr,$$

a za cijelu ploču

$$J_z = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{mR^2}{2}$$

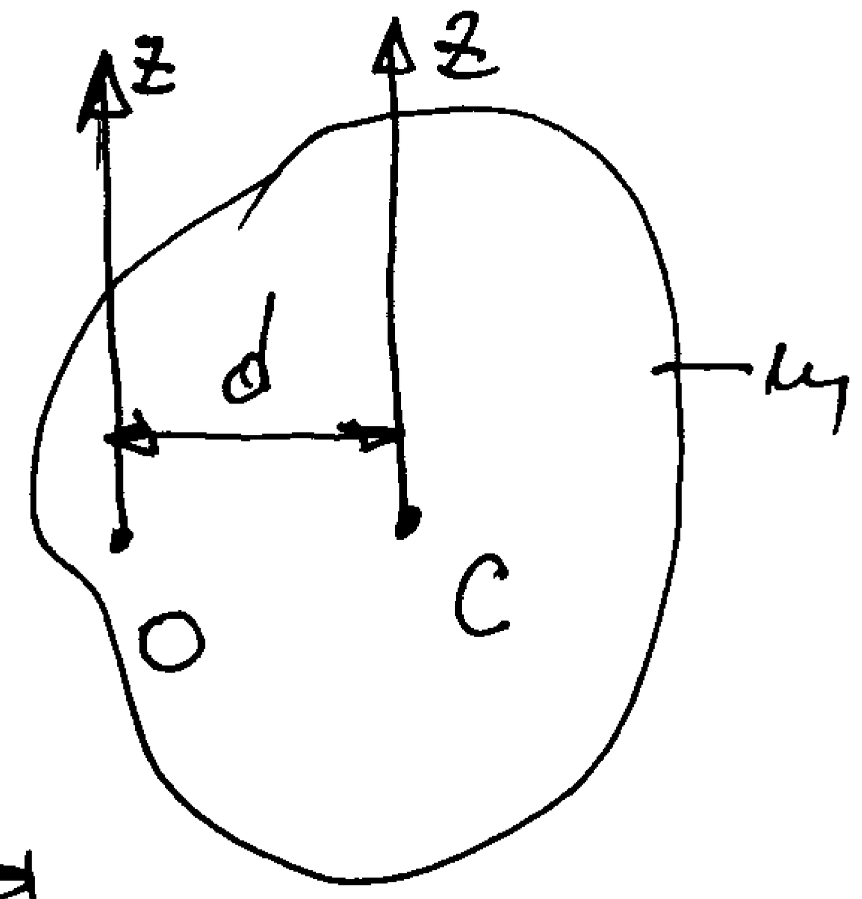



Ista formula

$$J_z = \frac{mR^3}{2}, \qquad (16)$$

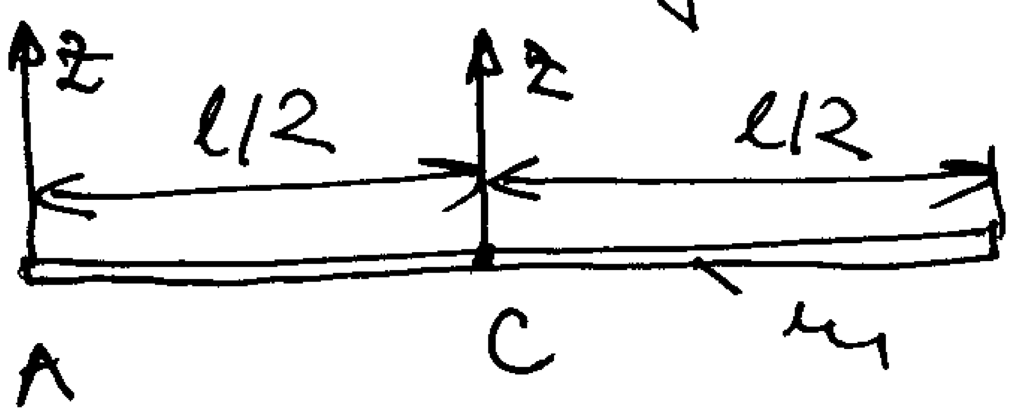
dobija se i za moment inercije homogenog valjka mase m i poluprečnika R, za njegovu uzdužnu osu simetrije.
Napomenimo da se momenti inercije tijela složenijeg oblika, kao i nehomogenih tijela, mogu odrediti eksperimentalnim putem pomoću odgovarajućih pribora.
Često je poznat, na primjer iz priručnika, moment inercije tijela za osu Cz, koja prolazi kroz centar masa tijela C, a u dinamičkim proračunima je potreban moment inercije za osu Oz koja je paralelna osi Cz i nalazi se na rastojanju d od nje. Vezu između ovih momenata inercije daje Hajgens-Štajnerova teorema koja glasi:

Moment inercije tijela za neku osu jednak je zbiru momenta inercije tijela za njoj paralelnu osu, koja prolazi kroz centar masa, i proizvoda mase tijela i kvadrata rastojanja između tih osa.




$$J_{Oz} = J_{Cz} + md^2 \qquad (17)$$

Primjer. Koliki je moment inercije homogenog štapa, mase m i dužine $l$, za poprečnu osu koja prolazi kroz jedan njegov kraj.

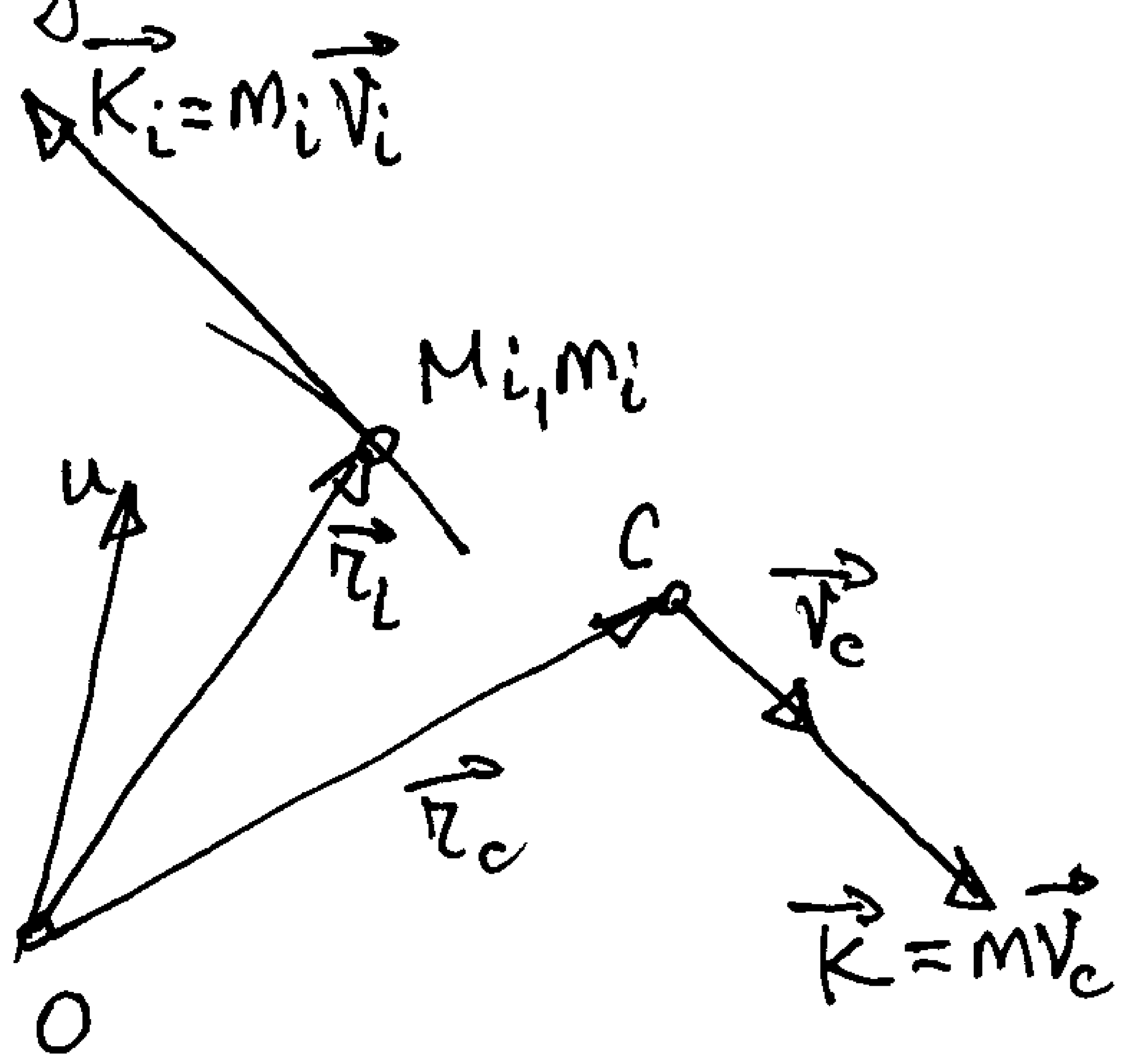



$$J_{Az} = J_{Cz} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

## 5.3 Zakon o promjeni količine kretanja

Količina kretanja sistema materijalnih tačaka se definiše kao vektorski zbir količina kretanja svih tačaka koje čine sistem:




$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \qquad (18)$$

Ona se, imajući u vidu relaciju (7), može dati u obliku

$$\vec{K} = m\vec{v}_C, \qquad (19)$$

tj. količina kretanja materijalnog sistema jednaka je proizvodu mase sistema i brzine centra inercije.

### 5.3.1 Diferencijalni oblik zakona o promjeni količine kretanja

Diferenciranjem po vremenu količine kretanja (18), dobijamo

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i .$$

S druge strane, ako se sve jednačine (1) saberu, dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^u = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^s$$

jer je glavni vektor unutrašnjih sila sistema jednak nuli ($\sum \vec{F}_i^u = 0$). Odavde slijedi zakon o promjeni količine kretanja

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^s, \quad \vec{F}_R^s = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^s, \qquad (20)$$

koji glasi: Izvod po vremenu količine kretanja materijalnog sistema jednak je vektorskom zbiru (glavnom vektoru) svih spoljašnjih sila koje djeluju na sistem.

Ako relaciju (20) projiciramo na neku nepokretnu osu $u$ dobijamo zakon o promjeni projekcije količine kretanja

$$\frac{dK_u}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{iu}^s, \qquad (21)$$

koji glasi: Izvod po vremenu projekcije količine kretanja na neku nepokretnu osu jednak je zbiru projekcija svih spoljašnjih sila na tu osu.

Treba uočiti da na promjenu količine kretanja sistema ne utiču unutrašnje sile.

Posledica 1 (zakon održanja količine kretanja). Ako je glavni vektor spoljašnjih sila jednak nuli, onda je vektor količine kretanja sistema konstantan.

Zaista, ako je $\vec{F}_r^s = 0$ onda je $d\vec{K}/dt = 0$ i, dakle, $\vec{K} = \overrightarrow{const}$.

Posledica 2 (zakon održanja projekcije količine kretanja). Ako je zbir projekcija svih spoljašnjih sila sistema na neku nepokretnu osu jednak nuli, onda je projekcija količine kretanja na tu osu konstantna.

Zaista, ako je $\sum_{i=1}^{n} F_{iu}^s = 0$, onda iz (21) slijedi da je $K_u = const$.

5.3.2 Integralni oblik zakona o promjeni količine kretanja

Ako obje strane jednačine (20) pomnožimo sa $dt$, a zatim integralimo u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$, dobijamo

$$\vec{K_2} - \vec{K_1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r^s dt ,$$

gdje su $\vec{K_1}$ i $\vec{K_2}$ količine kretanja sistema u trenucima $t_1$ i $t_2$, respektivno. Koristeći definiciju impulsa sile, gornja relacija se može zapisati u obliku

$$\vec{K_2} - \vec{K_1} = \vec{I}_r^s , \qquad (22)$$

gdje je $\vec{I}_r^s = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_r^s dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^s dt = \sum_{i=1}^{n} \vec{I}_i^s$ – glavni vektor impulsa spoljašnjih sila.

Dakle, promjena količine kretanja sistema za neki konačni interval vremena jednaka je glavnom vektoru impulsa spoljašnjih sila u tom vremenskom intervalu.

Ako jednačinu (22) projiciramo na neku nepokretnu osu $u$ dobijamo integralni oblik zakona o promjeni projekcije količine kretanja

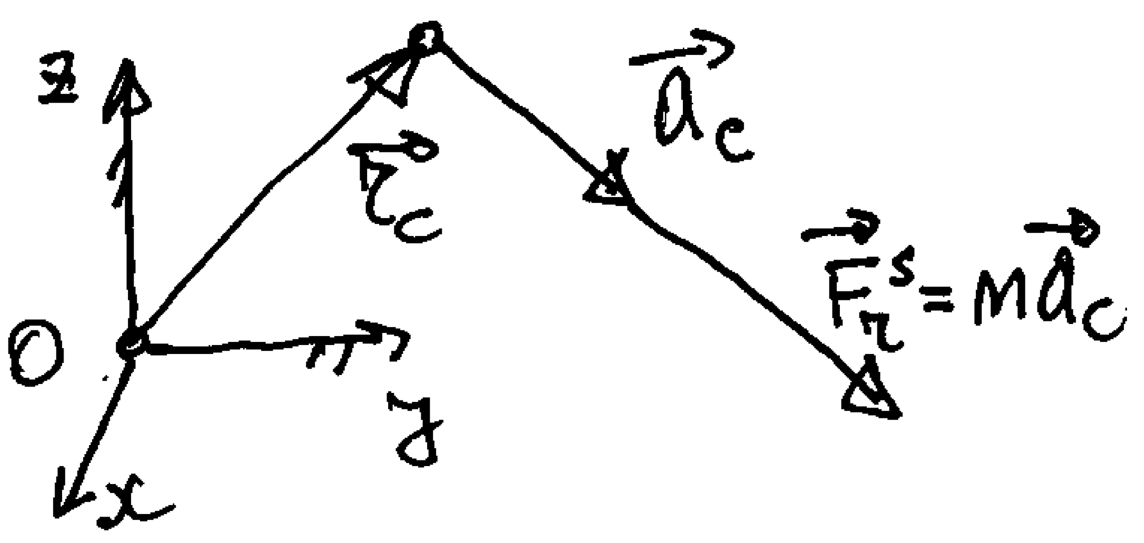
$$K_{2u} - K_{1u} = \sum_{i=1}^{n} I_{iu}^s , \qquad (23)$$

koji glasi: Promjena projekcije količine kretanja sistema na neku nepokretnu osu za konačan interval vremena jednaka je zbiru projekcija impulsa svih spoljašnjih sila na tu osu.

## 5.3.3 Zakon o kretanju centra inercije sistema

Ako se uzme u obzir da se količina kretanja sistema može izraziti u obliku $\vec{K} = m\vec{v}_c$ (v. (19)), zakon o promjeni količine kretanja (20) se modifikuje na oblik

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_r^s. \qquad (24)$$




Ova relacija izražava zakon o kretanju centra inercije sistema koji glasi: Centar inercije sistema kreće se kao materijalna tačka čija je masa jednaka masi sistema i na koju djeluje sila koja je jednaka glavnom vektoru svih spoljašnjih sila koje djeluju na sistem.

Projicirajući obje strane vektorske jednačine (24) na koordinatne ose, dobijamo

$$m\ddot{x}_c = F^s_{rx}, \quad m\ddot{y}_c = F^s_{ry}, \quad m\ddot{z}_c = F^s_{rz} \qquad (25)$$

Ove jednačine predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja centra inercije sistema u Dekartovim koordinatama.

Specijalno, translatorno kretanje krutog tijela u potpunosti je određeno kretanjem njegovog centra inercije. Prema tome, takvo tijelo može se smatrati materijalnom tačkom čija je masa jednaka masi tijela, a jednačine (25) će predstavljati diferencijalne jednačine translatornog kretanja krutog tijela u Dekartovim koordinatama.

Iz zakona o kretanju centra inercije slijedi nekoliko važnih posledica.

1) Unutrašnje sile ne utiču na kretanje centra inercije.

2) Ako je $\vec{F}_r^s = 0$, onda je, na osnovu (24), $\vec{a}_c = 0$, odnosno $\vec{v}_c = \overrightarrow{const} = \vec{v}_{c0}$.

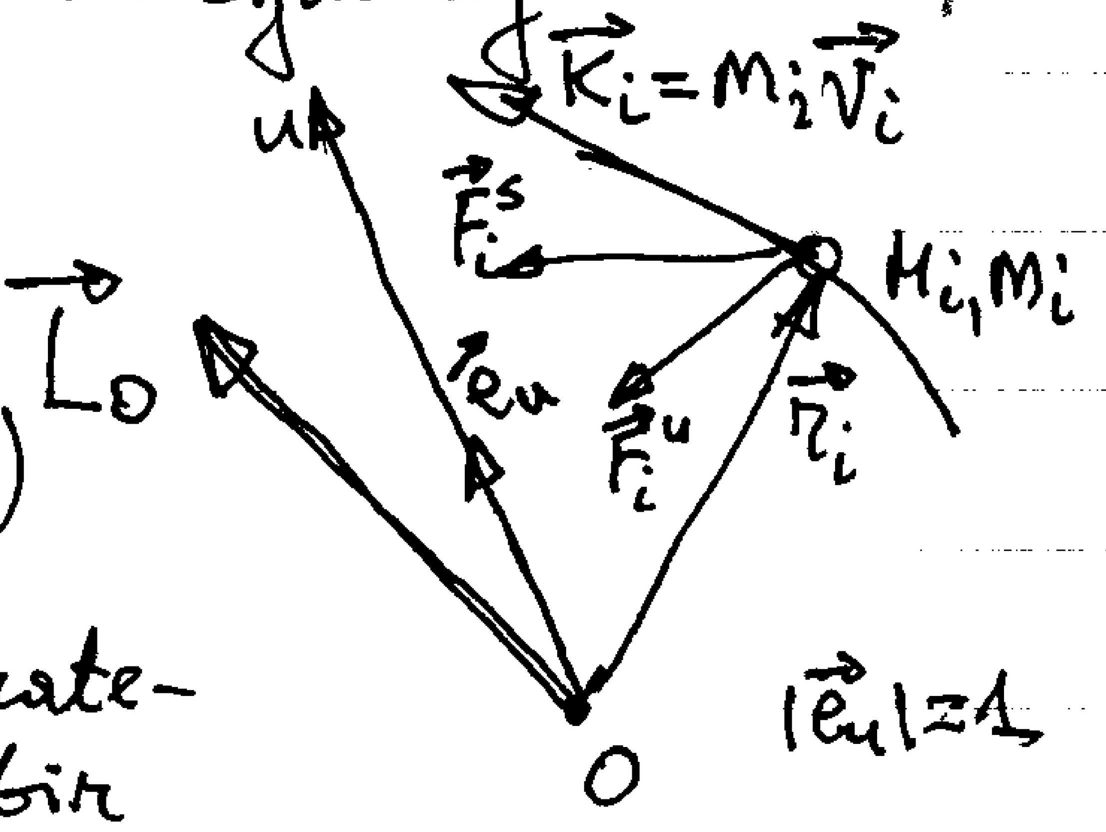
Prema tome, ako je vektorski zbir svih spoljašnjih sila koje djeluju na sistem jednak nuli, onda ce centar inercije sistema kreće jednoliko pravolinijski ili miruje.

3) Ako je $F^s_{rx} = \sum_{i=1}^{n} F^s_{ix} = 0$, onda je, na osnovu (25), $\ddot{x}_c = 0$, odnosno $\dot{x}_c = v_{cx} = const$.

Dakle, ako je zbir projekcija spoljašnjih sila na neku nepokretnu osu jednak nuli, onda je projekcija brzine centra inercije sistema na tu osu konstantna.

## 5.4 Zakon o promjeni momenta količine kretanja

Moment količine kretanja (kinetički moment) materijalnog sistema za nepokretnu tačku O predstavlja vektorski zbir momenata količina kretanja tačaka koje obrazuju sistem u odnosu na tu tačku:




$$\vec{L}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_{Oi}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_O^{m_i\vec{v}_i}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i \quad (26)$$

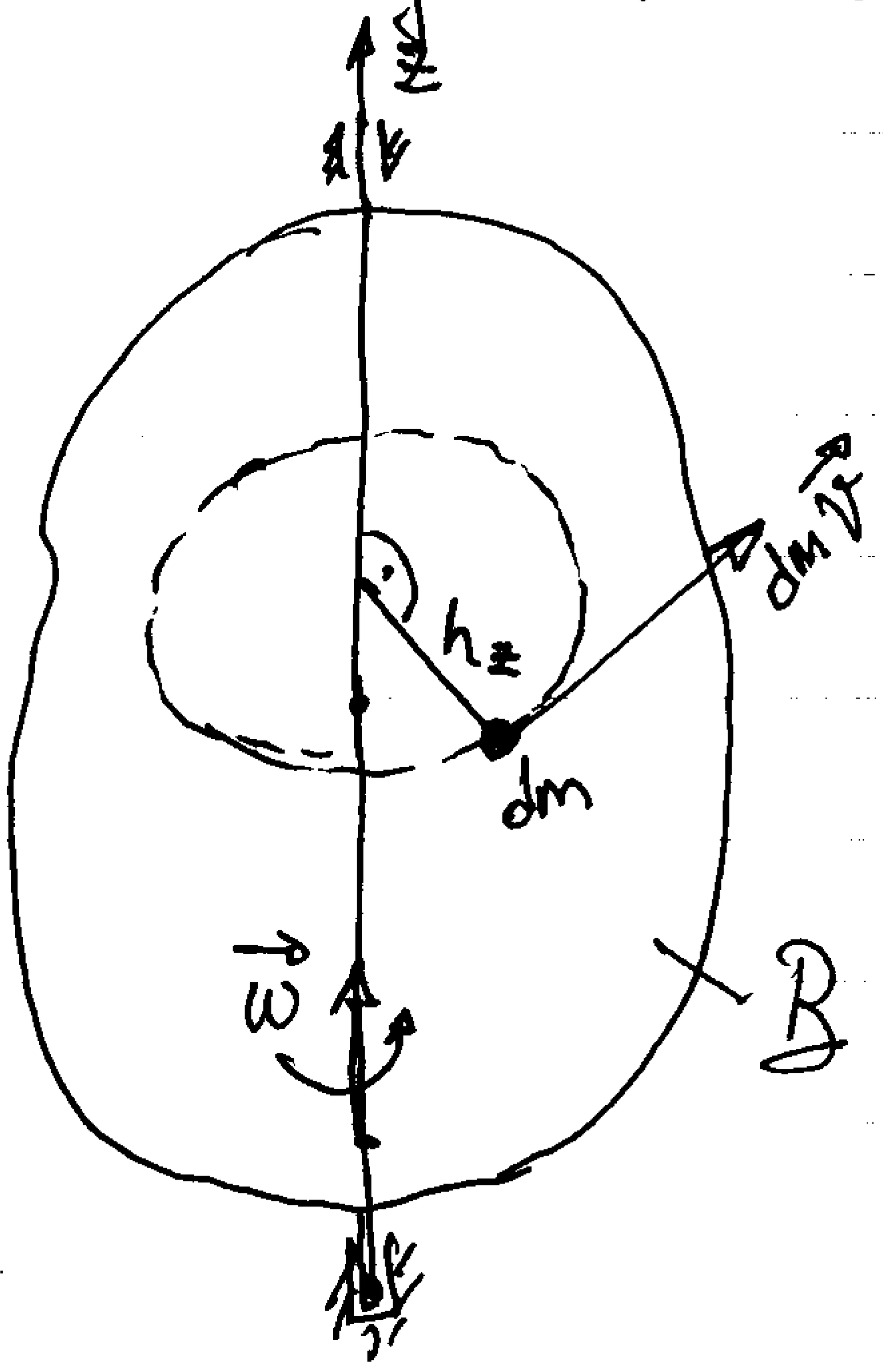
Moment količine kretanja (kinetički moment) materijalnog sistema za nepokretnu osu u predstavlja zbir momenata količina kretanja tačaka sistema u odnosu na tu osu:

$$L_u=\sum_{i=1}^{n}L_{ui}=\sum_{i=1}^{n}M_u^{m_i\vec{v}_i} \quad (27)$$

Jasno je da je $L_u=\vec{L}_O\cdot\vec{e}_u$

Kinetički moment krutog tijela za obrtnu osu.

Posmatrajmo kruto tijelo mase m koje se obrće oko nepokretne z-ose ugaonom brzinom $\omega$. Izračunajmo kinetički moment tijela u odnosu na obrtnu osu $L_z$.




Uočimo djelić tijela, elementarne mase dm, koji se nalazi na rastojanju $h_z$ od ose z. Njegova brzina je $v=\omega h_z$ i pada u pravac tangente na kružnu putanju, a moment količine kretanja djelića za z-osu je

$$dL_z=L_z(dm)=M_z^{dm\vec{v}}=dm\,v\,h_z=\omega h_z^2\,dm$$

Integracijom ovog izraza po cijelom tijelu B dobijamo kinetički moment tijela za osu z

$$L_z=\int_{(B)}dL_z=\int_{(B)}\omega h_z^2\,dm=\omega\int_{(B)}h_z^2\,dm,$$

odnosno

$$L_z=J_z\,\omega, \quad (28)$$

gdje je $J_z=\int_{(B)}h_z^2\,dm$ moment inercije tijela za osu z.

Prema tome, kinetički moment krutog tijela za obrtnu osu jednak je proizvodu momenta inercije tijela za tu osu i ugaone brzine tijela.

Zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalne tačke primijenjen na tačku $M_i$, mase $m_i$, iz datog sistema glasi

$$\frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} + \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u},$$

gdje su $\vec{F}_i^s$ i $\vec{F}_i^u$ rezultante spoljašnjih i unutrašnjih sila, koje djeluju na tačku $M_i$. Ako postavimo ovakve jednačine za svaku tačku sistema i zatim sve te jednačine saberemo, dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{Oi}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u}$$

Pošto je $\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{Oi} = \vec{L}_O$ i glavni moment unutrašnjih sila sistema jednak nuli (V,(3)), to gornja relacija dobija oblik:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^s, \quad \vec{M}_O^s = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s}. \qquad (29)$$

Dobijena jednačina izražava zakon o promjeni kinetičkog momenta sistema: Izvod po vremenu kinetičkog momenta sistema za nepokretnu tačku jednak je vektorskom zbiru momenata (glavnom momentu) svih spoljašnjih sila za istu tačku.

Projiciranjem vektorske jednačine (29) na neku nepokretnu osu $u$ dobijamo zakon o promjeni kinetičkog momenta za nepokretnu osu

$$\frac{dL_u}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_u^{\vec{F}_i^s}, \qquad (30)$$

koji glasi: Izvod po vremenu kinetičkog momenta sistema za neku nepokretnu osu jednak je zbiru momenata svih spoljašnjih sila za tu osu.

Iz ovih zakona slijedi nekoliko važnih posledica.

1) Unutrašnje sile ne utiču na promjenu kinetičkog momenta sistema.

2) Ako je $\vec{M}_O^s = 0$, onda je, na osnovu (29), $\vec{L}_O = \overrightarrow{const}$

Prema tome, ako je glavni moment spoljašnjih sila za neku nepokretnu tačku jednak nuli, onda je kinetički moment sistema za istu tačku konstantan (i po pravcu i po intezitetu)

3) Ako je $\sum_{i=1}^{n} M_u^{\vec{F}_i^s} = 0$, onda je, na osnovu (30), $L_u = const$.

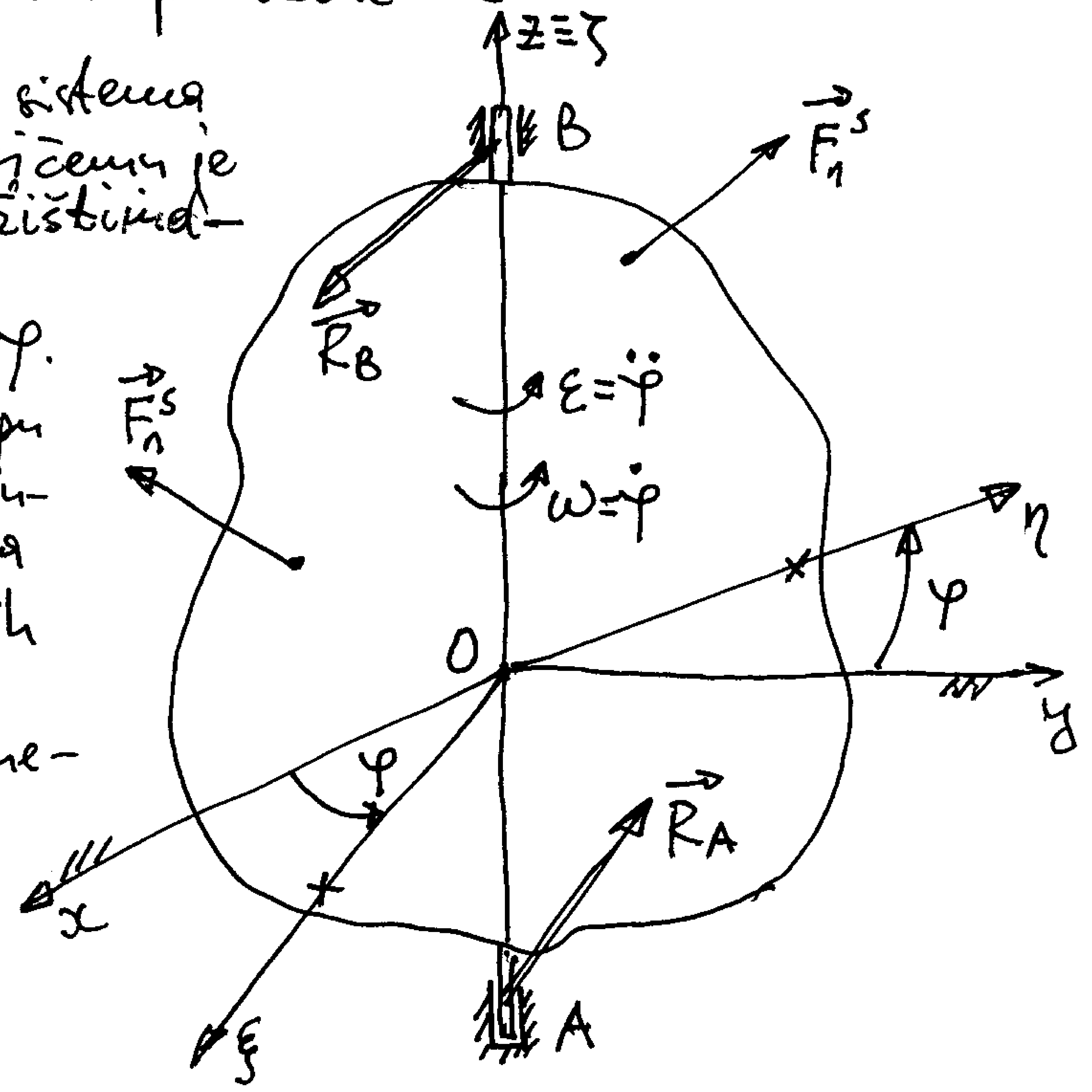
Znači, ako je suma momenata svih spoljašnjih sila za neku nepokretnu osu jednaka nuli, onda je kinetički moment sistema za tu osu konstantan.

<u>Napomena</u>. Primijetimo, ne dokazujući to, da jednačina (29) važi i kada se nepokretna tačka O zamijeni sa centrom inercije C sistema. Tada se $\vec{L}_C$ računa kao kinetički moment relativnog kretanja sistema u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije.

## 5.5 Diferencijalne jednačine kretanja krutog tijela

### 5.5.1 Obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose

Neka se kruto tijelo pod dejstvom datog sistema sila $\vec{F}_1^s, \dots, \vec{F}_n^s$ obrće oko nepokretne ose $z$, pri čemu je nepokretnost ose obrtanja obezbijeđeno ležištima — cilindričnim B i potpornim A.




Položaj tijela određen je uglom obrtanja $\varphi$. Pošto je tijelo neslobodno, saglasno principu oslobađanja od veza, uticaj ležišta zamjenjujemo reakcijama $\vec{R}_A$ i $\vec{R}_B$, koje zajedno sa datim silama $\vec{F}_i^s$ čine sistem spoljašnjih sila za posmatrano tijelo.

Ako primijenimo zakon o promjeni kinetičkog momenta za nepokretnu osu $z$, uzimajući u obzir da je $M_z^{\vec{R}_A}=0$ i $M_z^{\vec{R}_B}=0$, dobijamo

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_z^{\vec{F}_i^s}$$

Odavde, pošto je $L_z = J_z\omega = J_z\dot\varphi$ (v. (281)) i $J_z$ konstantna veličina, dobijamo

$$J_z\ddot\varphi = \sum_{i=1}^{n} M_z^{\vec{F}_i^s}. \qquad (31)$$

Jednačina (31) predstavlja diferencijalnu jednačinu obrtanja krutog tijela. Iz nje proističe da je proizvod momenta inercije tijela za obrtnu osu $J_z$ i ugaonog ubrzanja ($\varepsilon = \ddot\varphi$) jednak zbiru momenata svih spoljašnjih sila za tu osu.

Napomena. Često se veličina $M_z^s = \sum M_z^{\vec{F}_i^s}$ zove obrtni moment

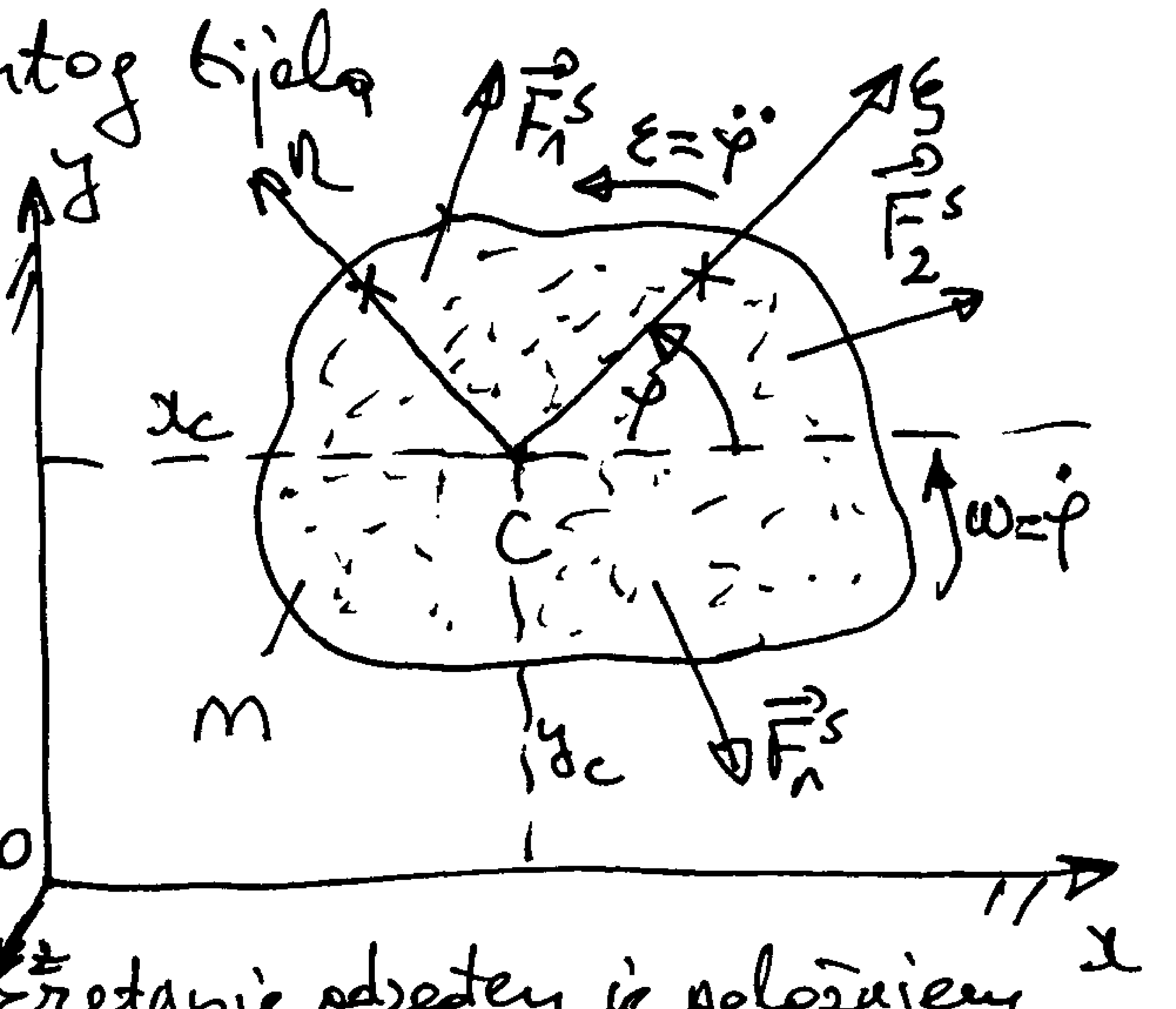
Kada je poznat obrtni moment $M_z^s$, integracijom jednačine (31) saglasno sa početnim uslovima ($t_0=0$: $\varphi(t_0)=\varphi_0$, $\dot\varphi(t_0)=\dot\varphi_0$) dobija se konačna jednačina obrtanja tijela $\varphi = f(t)$.

Ako je $M_z^s = 0$, onda je $\dot\varphi = \omega = const$, tj. tijelo se obrće jednoliko.

Ako je $M_z^s = const$, onda je $\ddot\varphi = \varepsilon = const$, tj. tijelo se obrće jednakopromjenljivo.

Iz jednačine (31) se vidi, da pri datom $M_z^s$, ukoliko je veći moment inercije tijela, utoliko je manje ugaono ubrzanje, i obrnuto. Znači, moment inercije je mjera inertnosti tijela pri njegovom obrtnom kretanju, kao što je to masa tijela pri njegovom translatornom kretanju.

# 5.5.2. Ravansko kretanje krutog tijela




Pretpostavke:

1) Oxy je ravan materijalne simetrije tijela.
2) Sve spoljašnje sile leže u ravni Oxy.
3) Početne brzine svih tačaka tijela raspoređene su simetrično u odnosu na ravan Oxy.

Pod ovim uslovima tijelo će izvoditi ravansko kretanje.

Položaj tijela koje izvodi ravansko kretanje određen je položajem izabranog pola i uglom obrtanja oko ose koja prolazi kroz pol i upravna je na ravan kretanja. Pri dinamičkim razmatranjima za pol se uzima centar inercije C tijela. U tom slučaju položaj tijela određuju koordinate $x_C, y_C$ i ugao obrtanja $\varphi$.

Kretanje tačke C određujemo korišćenjem zakona o kretanju centra inercije

$$m\vec{a}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^s,$$

dok ćemo obrtanje oko tačke C (ose Cz) odrediti jednačinom oblika (31), jer zakon iz koga je dobijena ta jednačina važi i za obrtno kretanje tijela oko centra inercije (v. napomenu u §5.4). Projicirajući gornju vektorsku jednačinu na ose Dekartovog koordinatnog sistema Oxy, dobijamo

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^s \\ m\ddot{y}_C &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^s \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} &= \sum_{i=1}^{n} M_{Cz}^{\vec{F}_i^s} \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Jednačine (32) predstavljaju diferencijalne jednačine ravanskog kretanja krutog tijela.

Kada su poznate sile, integracijom jednačina (32), saglasno sa početnim uslovima ($t_0=0$: $x_C(t_0)=x_{C0}$, $y_C(t_0)=y_{C0}$, $\varphi(t_0)=\varphi_0$, $\dot{x}_C(t_0)=\dot{x}_{C0}$, $\dot{y}_C(t_0)=\dot{y}_{C0}$, $\dot{\varphi}(t_0)=\dot{\varphi}_0$), određujemo konačne jednačine ravnog kretanja tijela

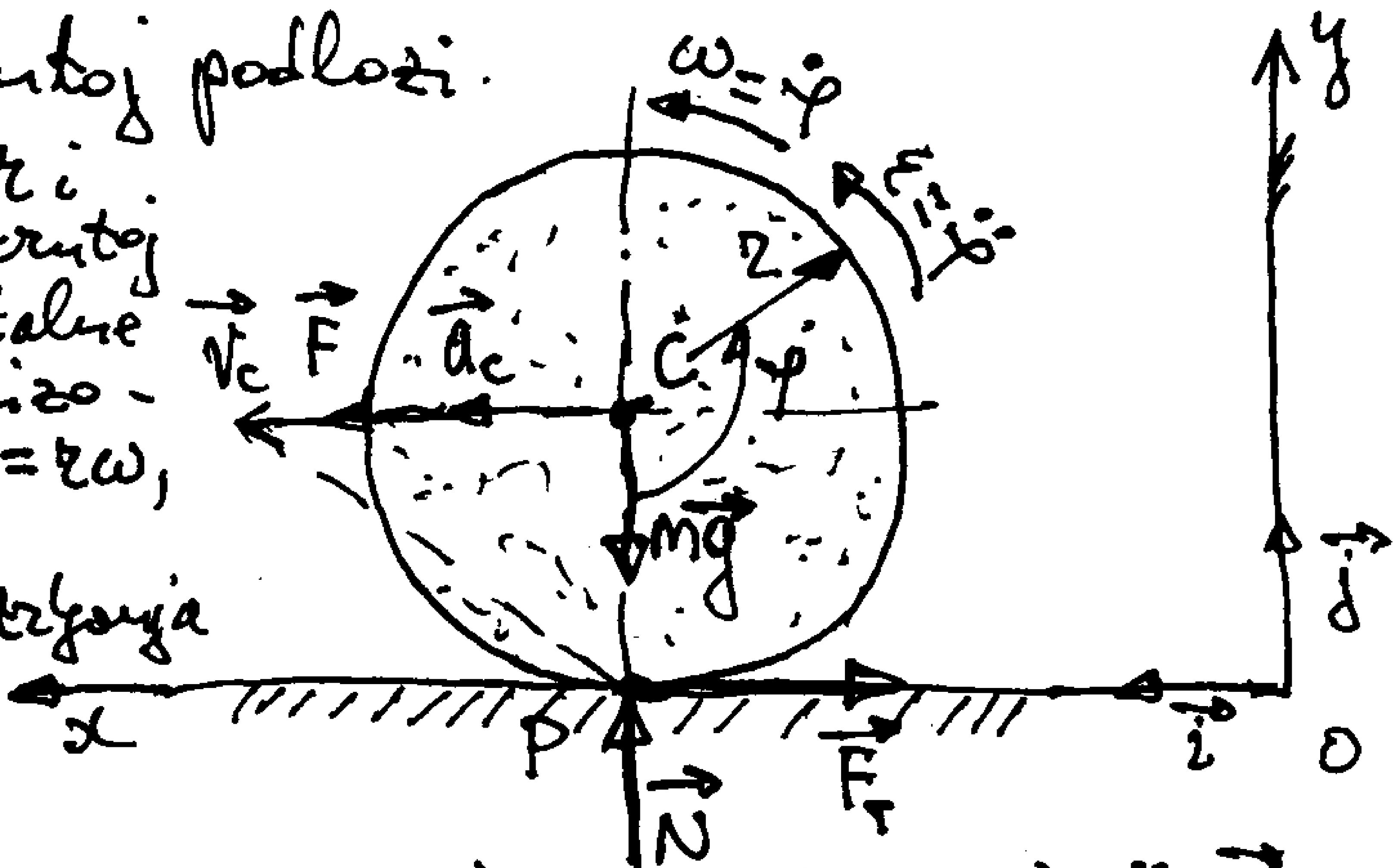
$$x_C=x_C(t),\quad y_C=y_C(t),\quad \varphi=\varphi(t).$$

Napomena. Često se umjesto $J_{Cz}$ i $M_{Cz}^{\vec{F}_i^s}$ piše $J_C$ i $M_C^{F_i^s}$.

## 5.5.3 Ravansko kotrljanje krutog tijela

Prostiji slučajevi kotrljanja tijela spadaju u ravansko kretanje. Pri tome osnovnu ulogu imaju sile trenja sa svim svojim specifičnim osobinama koje su razmotrene u statici.

a) Kotrljanje točka po idealno krutoj podlozi.




Pretpostavimo da se točak, poluprečnika r i mase m, kotrlja bez klizanja po idealno krutoj horizontalnoj podlozi pod dejstvom horizontalne sile $\vec{F}$. Tada je tačka dodira P točka i horizontalne ravni trenutni pol brzine, pa je $v_C = r\omega$, odnosno

$\dot{x}_C = r\dot{\varphi}$ (33) – kinematički uslov kotrljanja bez klizanja.

Diferenciranjem relacije (33) dobijamo

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi} \qquad (34)$$

$$\vec{v}_C = v_C\vec{i} = \dot{x}_C\vec{i}, \quad \vec{a}_C = a_C\vec{i} = \ddot{x}_C\vec{i}$$

Na točak djeluju spoljašnje sile: $m\vec{g}$, $\vec{F}$ i reakcija podloge koja se razlaže na dvije komponente: normalnu $\vec{N}$ i silu trenja $\vec{F}_T$ horizontalnog pravca. Diferencijalne jednačine ovog ravanskog kretanja su:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= F - F_T, \\ m\cancel{\ddot{y}_C}^{\,0} &= -mg + N, \\ J_C\ddot{\varphi} &= F_T r, \end{aligned}\right\} (35)$$

gdje je $J_C$ moment inercije točka za centralnu osu upravnu na ravan kretanja.

Iz jednačina (35) i (34), nalazimo

$$\ddot{x}_C = a_C = \frac{F}{m + J_C/r^2}, \quad F_T = \frac{J_C}{mr^2 + J_C}F, \quad N = mg \qquad (36)$$

Pošto u posmatranom trenutku tačka P točka ne klizi po horizontalnoj ravni to je sila $F_T$ identična sa silom trenja pri mirovanju i ona mora biti manja od granične sile trenja $F_{gr} = \mu_s N$ ($\mu_s$ – statički koeficijent trenja):

$$F_T < \mu_s N \qquad (36)$$

Uslov (36) je dinamički uslov kotrljanja bez klizanja. U našem slučaju on dovodi do uslova koji mora zadovoljavati pogonska sila $\vec{F}$ da bi se točak kotrljao bez klizanja:

$$F < \mu_s \frac{mr^2 + J_C}{J_C} mg.$$

Ako poslednji uslov nije ispunjen nemoguće je ostvariti kotrljanje bez klizanja i tačka P nije više pol brzina, tj. više ne važi veza (33), odnosno (34). U ovom slučaju diferencijalne jednačine kretanja zadržavaju oblik (35), ali je u njima, na osnovu Kulonovog zakona trenja, $F_T = \mu_D N$, gdje je $\mu_D$ dinamički koeficijent trenja klizanja.

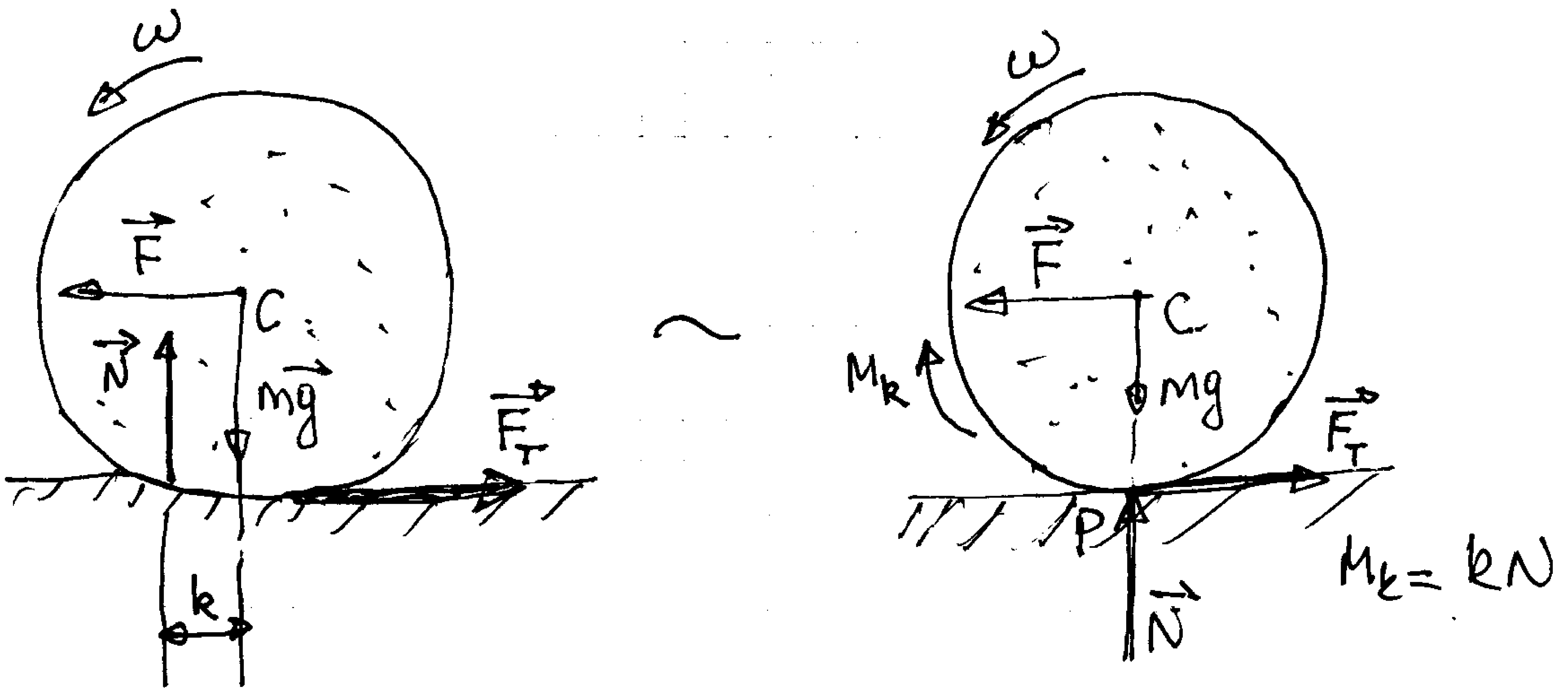
Naglasimo, da zbog male razlike u vrijednostima koeficijenata $\mu_S$ i $\mu_D$, često se uzima da je $\mu_S = \mu_D = \mu$.

b) Kotrljanje točka po deformabilnoj podlozi

U realnijem modelu kotrljanja točka uzima se u obzir izvjesna deformabilnost tijela, tako da sile deformacije rađaju moment otpora protiv kotrljanja $M_k$ koji je suprotnog smjera od smjera obrtanja točka, a koji je jednak

$$M_k = k N, \qquad (37)$$

gdje je k krak (koeficijent) trenja pri kotrljanju. Koeficijent k određuje se eksperimentalno i ima dimenziju dužine.




Veličina koeficijenta k za neke materijale iznosi:

drvo po drvetu: $k = (5-8)\cdot 10^{-4}$ [m]

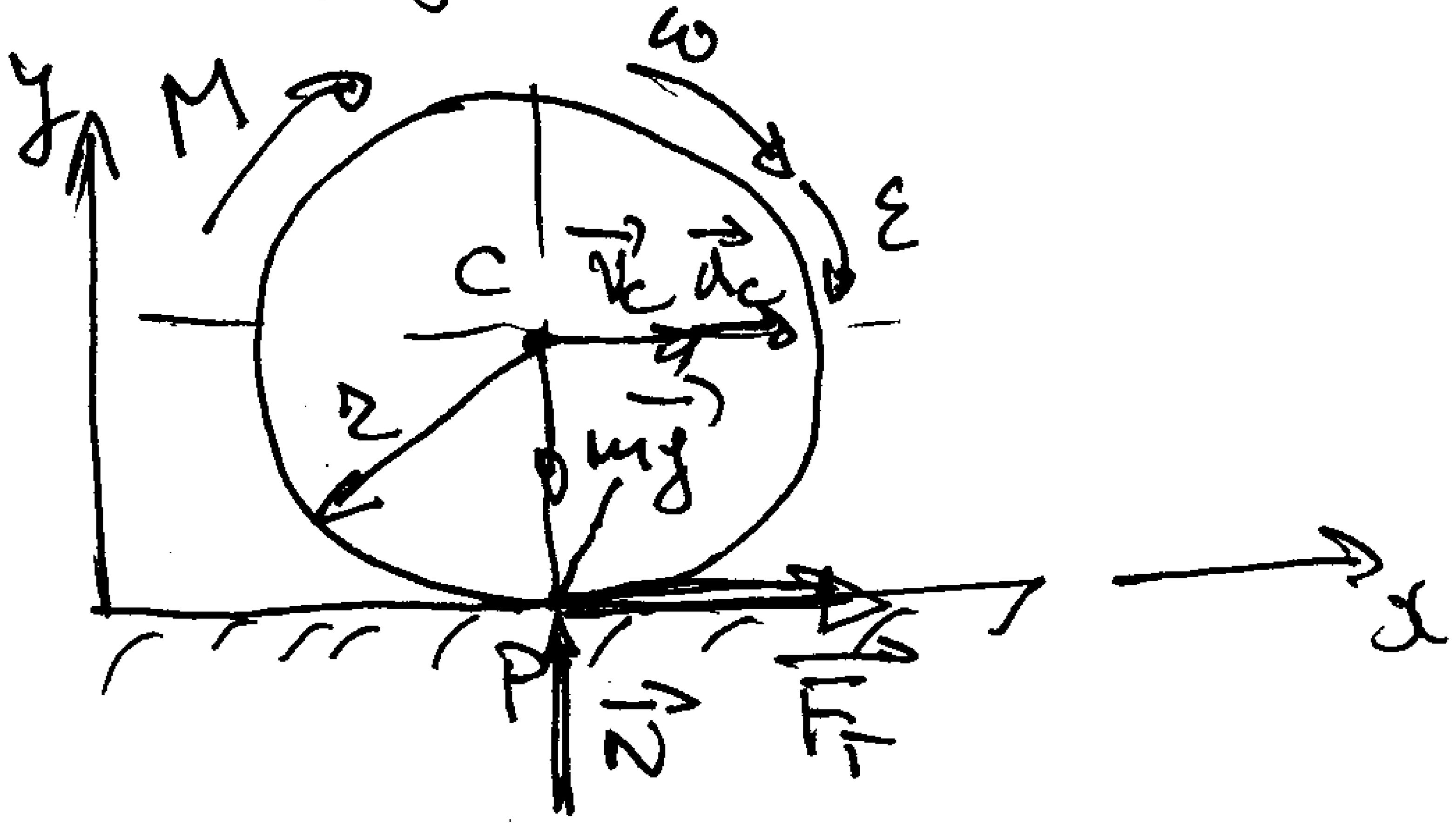
meki čelik po čeliku (točak po šini): $k = 5\cdot 10^{-5}$ [m]

kaljeni čelik po čeliku (kotrljajni ležaj): $k = 1\cdot 10^{-5}$ [m]

Dakle, u većini slučajeva moment otpora protiv kotrljanja je veoma mali pa se ne uzima u obzir pri proračunu kretanja.

Primjer. Na pogonski točak automobila, poluprečnika r i mase m, djeluje obrtni moment M. Koji uslov mora da zadovoljava obrtni moment M da bi se točak kotrljao bez klizanja po horizontalnoj podlozi, ako je statički koeficijent trenja $\mu_s$. Otpor kotrljanju zanemariti!

$v_C = r\omega \rightarrow a_C = r\varepsilon, \quad \varepsilon = \dot{\omega}$




Dif. jed. kretanja su:

$$m a_C = m\ddot{x}_C = F_T$$

$$0 = -mg + N$$

$$J_C \cdot = M - F_T \cdot r$$

Smatrajući da je točak homogeni kružni disk, mase m i poluprečnika r, imamo da je (v. (16)) $J_C = \frac{mr^2}{2}$.

$$\Rightarrow a_C = \frac{2M}{3rm}, \quad F_T = \frac{2}{3}\frac{M}{r}, \quad N = mg$$

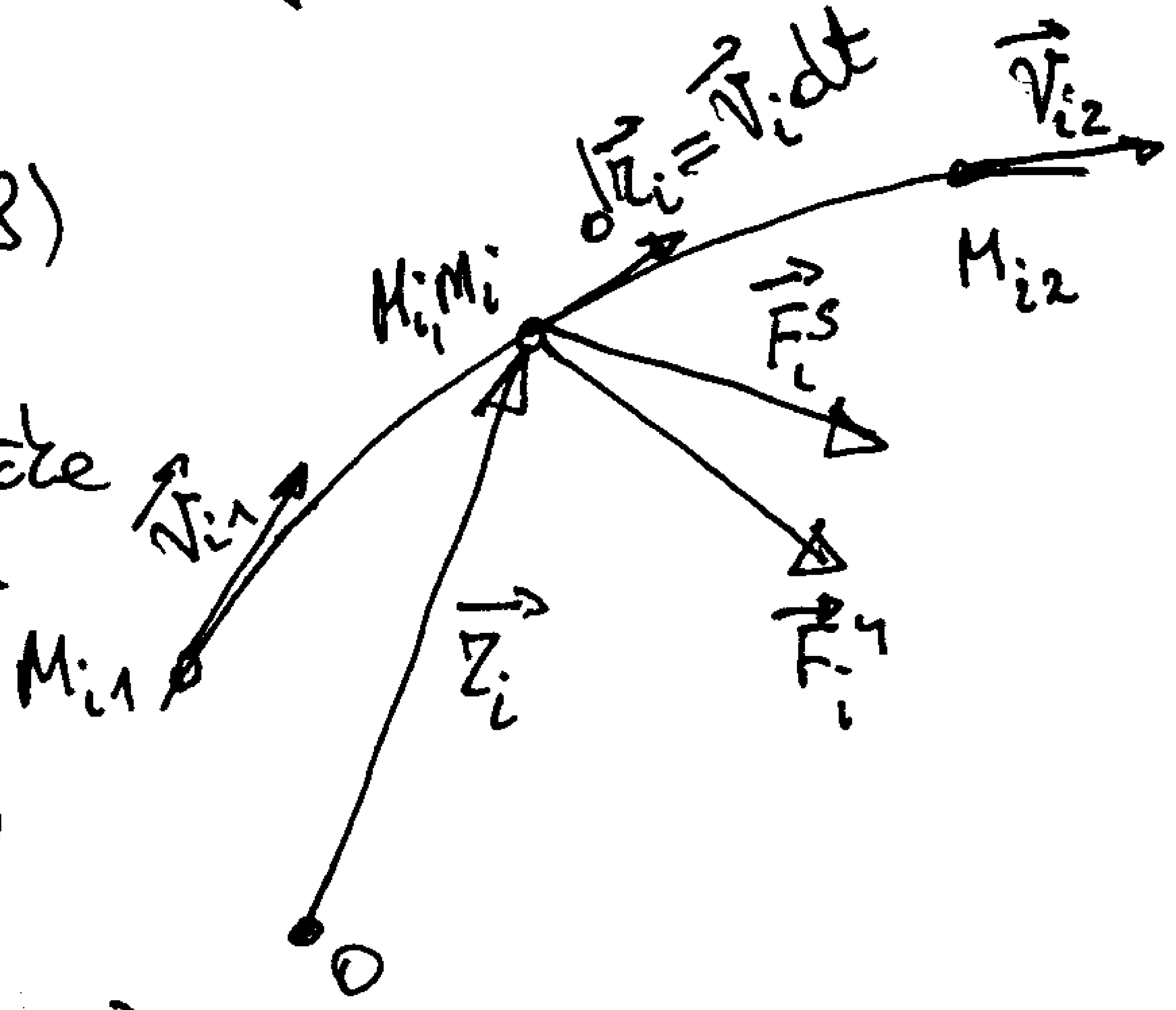
$$F_T < \mu_s N \Rightarrow \boxed{M < \frac{3}{2}\mu_s m g r}$$

Napomena. Smjer sile trenja $F_T$ pretpostavljeno je da je udesno, jer pod dejstvom momenta M tačka P točka teži da se pomjeri ulijevo, inače, smjer ove sile može se proizvoljno pretpostaviti jer se ona određuje iz dif. jed. kretanja.

## 5.6 Zakon o promjeni kinetičke energije

Kinetička energija materijalnog sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija svih tačaka koje obrazuju sistem:

$$E_k=\sum_{i=1}^{n} E_{ki}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \qquad (38)$$




Diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetičke energije materijalne tačke primijenjen na i-tu tačku iz datog sistema glasi:

$$dE_{ki}=\hat{d}A_i \,,\quad i=1,\dots,n\,, \qquad (39)$$

gdje je elementarni rad $\hat{d}A_i$ zbir radova rezultante spoljašnjih $\vec{F}_i^s$ i unutrašnjih sila $\vec{F}_i^u$, koje djeluju na tu tačku, tj.

$$\hat{d}A_i=\hat{d}A_i^{(s)}+\hat{d}A_i^{u}\,,\quad \hat{d}A_i^{(s)}=\vec{F}_i^s\cdot d\vec{r}_i\,,\quad \hat{d}A_i^{(u)}=\vec{F}_i^u\cdot d\vec{r}_i$$

Ako sve jednačine (39) saberemo dobijamo diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetičke energije materijalnog sistema

$$dE_k=\hat{d}A^{(s)}+\hat{d}A^{(u)}, \qquad (40)$$

gdje je $E_k$, prema (38), kinetička energija sistema, a $\hat{d}A^{(s)}=\sum_{i=1}^{n}\hat{d}A_i^{(s)}$ i $\hat{d}A^{(u)}=\sum_{i=1}^{n}\hat{d}A_i^{(u)}$ elementarni radovi svih spoljašnjih i svih unutrašnjih sila sistema.

Prema tome, elementarni priraštaj (diferencijal) kinetičke energije materijalnog sistema jednak je zbiru elementarnih radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila koje djeluju na sistem.

Dijeljenjem lijeve i desne strane jednačine (40) sa $dt$ dobijamo alternativni oblik

$$\frac{dE_k}{dt}=P^{(s)}+P^{(u)}, \qquad (41)$$

koji glasi: Izvod kinetičke energije sistema po vremenu jednak je zbiru snaga svih spoljašnjih i unutrašnjih sila ($P^{(s)}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^s\cdot\vec{v}_i$, $P^{(u)}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^u\cdot\vec{v}_i$).

Treći oblik zakona, takozvani integralni oblik, dobija se integracijom izraza (40) duž trajektorija tačaka od početnih položaja $M_{i1}$ do krajnjih $M_{i2}$:

$$E_{k2}-E_{k1}=A_{(1,2)}^{(s)}+A_{(1,2)}^{(u)} \qquad (42)$$

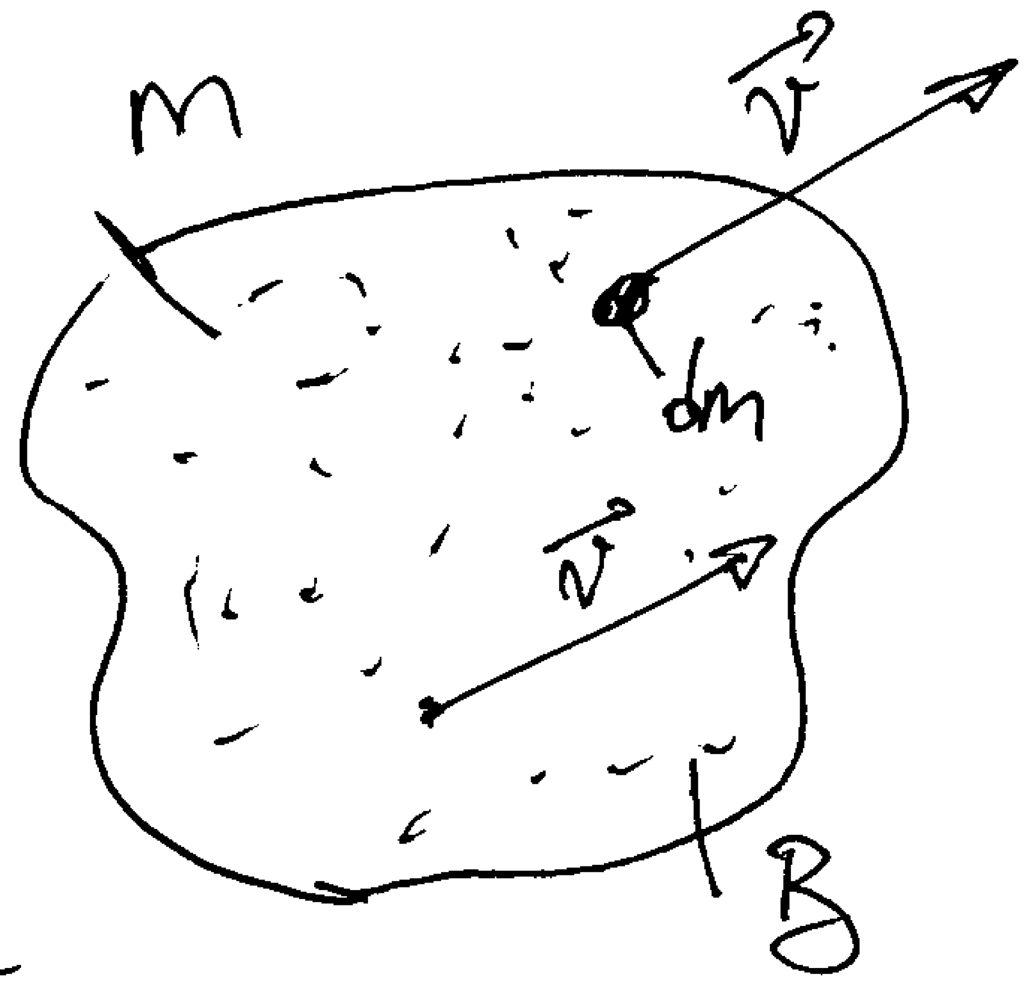
Dakle, priraštaj kinetičke energije sistema na konačnom pomjeranju jednak je zbiru radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila na tom pomjeranju.

U vezi sa ovim zakonom važno je napomenuti da je ovo jedini opšti zakon dinamike sistema u kojem se pojavljuje uticaj unutrašnjih sila. Naime, u opštem slučaju, kada se tačke sistema kreću jedna u odnosu na drugu, rad unutrašnjih sila je različit od nule. Polazeći od činjenice da se unutrašnje sile javljaju u parovima suprotnih sila, saglasno zakonu akcije i reakcije, može se pokazati da je rad unutrašnjih sila jednak nuli u sistemima kod kojih su rastojanja između napadnih tačaka unutrašnjih sila nepromjenljiva. Takvi sistemi zovu se nepromjenljivi (neizmenljivi). Specijalan slučaj nepromjenljivog sistema je kruto tijelo. Takođe, navodimo bez dokaza da je:

– rad unutrašnjih sila gipkog nerastegljivog užeta jednak nuli
– rad reakcija idealnih (glatkih) veza jednak nuli.

### 5.6.1 Kinetička energija krutog tijela

a) Translatorno kretanje.




U ovom slučaju sve tačke tijela imaju iste brzine $\vec{v}$. Kinetička energija elementarne mase dm, kao kinetička energija materijalne tačke čija je brzina $\vec{v}_1$, iznosi

$$dE_k = \frac{1}{2} dm\, v_1^2$$

pa integracijom ovog izraza po tijelu B dobijamo

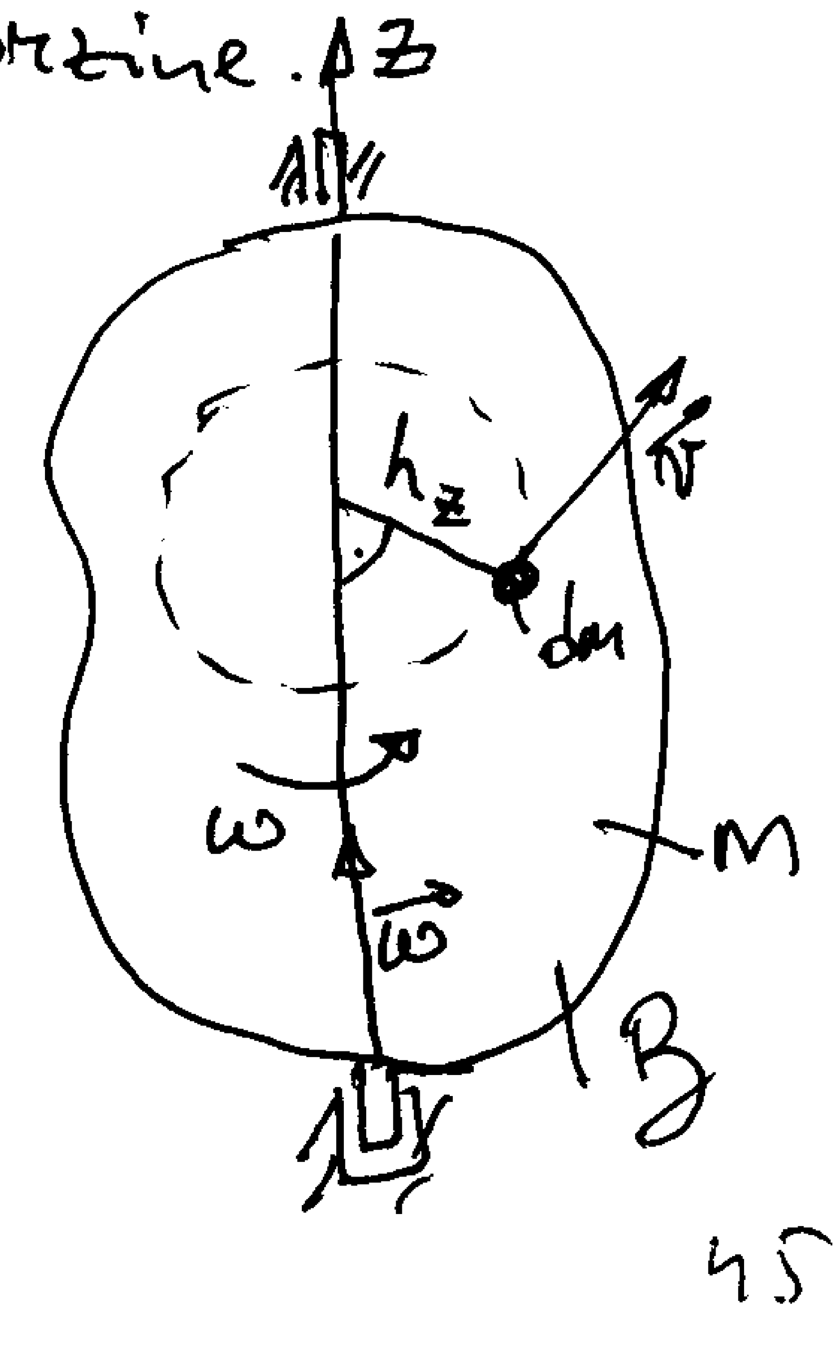
$$E_k = \frac{1}{2}\int_{(B)} v^2 dm = \frac{1}{2} v^2 \int_{(B)} dm = \frac{1}{2} m v^2,$$

tj.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2. \qquad (43)$$

Dakle, kinetička energija translatorno pokretnog tijela jednaka je polovini proizvoda mase tijela i kvadrata njegove brzine.

b) Obrtanje krutog tijela oko nepokretne ose.




$v = h_z \omega$

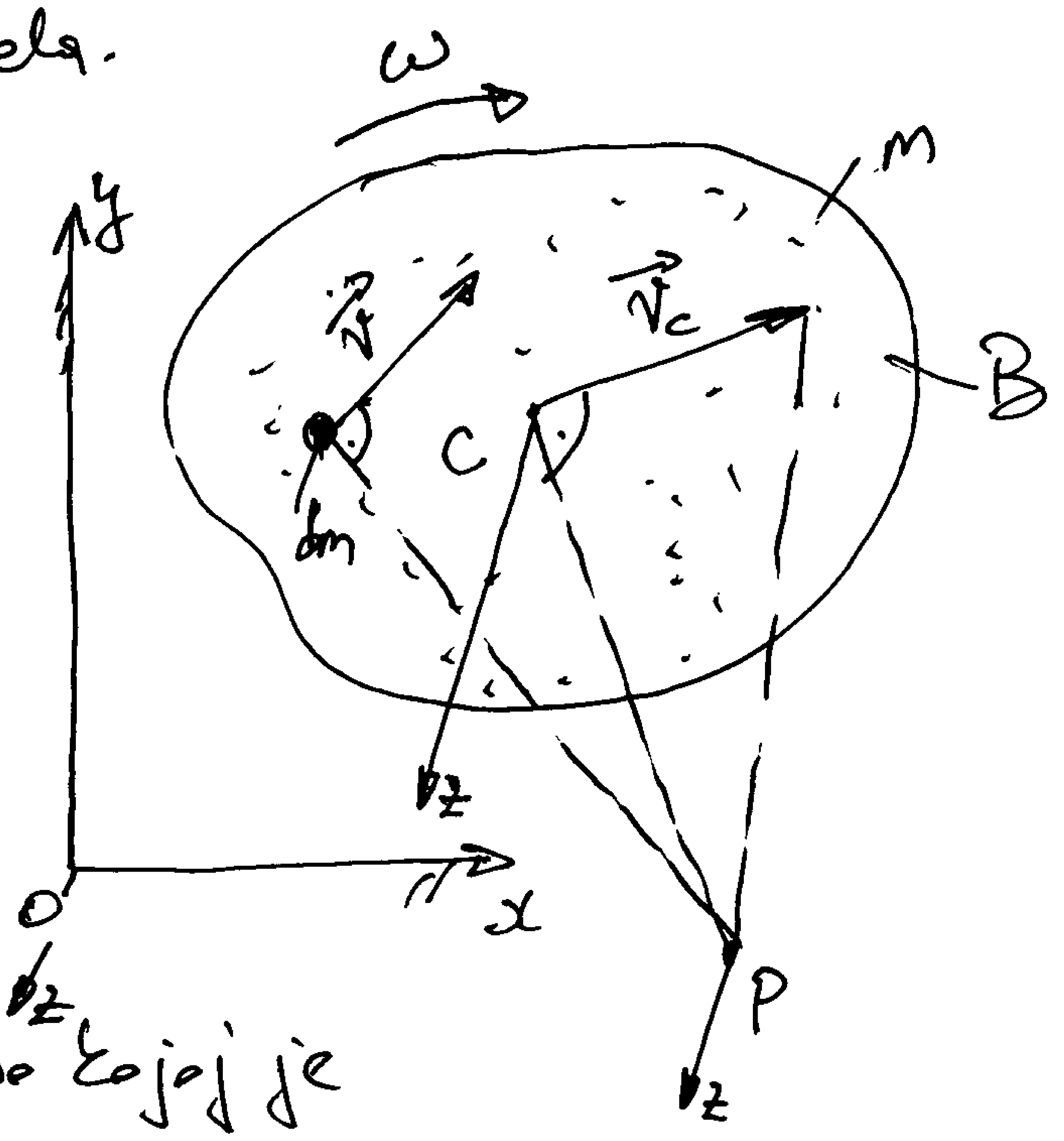
$dE_k = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2}\omega^2 h_z^2 dm$ – kinetička energija elementarnog djelića

$$E_k = \frac{1}{2}\int_{(B)} \omega^2 h_z^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{(B)} h_z^2 dm$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad J_z = \int_{(B)} h_z^2 dm \qquad (44)$$

Kinetička energija tijela pri njegovom obrtnom kretanju jednaka je polovini proizvoda momenta inercije tijela za obrtnu osi i kvadrata ugaone brzine tijela.

c) Ravansko kretanje krutog tijela.




Raspored brzina tačaka tijela je takav kao da se tijelo u datom trenutku obrće ugaonom brzinom ω oko ose koja prolazi kroz trenutni pol brzina P a koja je upravna na ravan kretanja (Pz osa). Prema tome, biće

$$E_k = \frac{1}{2} J_{Pz} \omega^2.$$

S druge strane, imajući u vidu da je brzina centra inercije tijela

$$V_c = \overline{CP}\,\omega,$$

kao i Hajgens-Štajnerovu teoremu po kojoj je

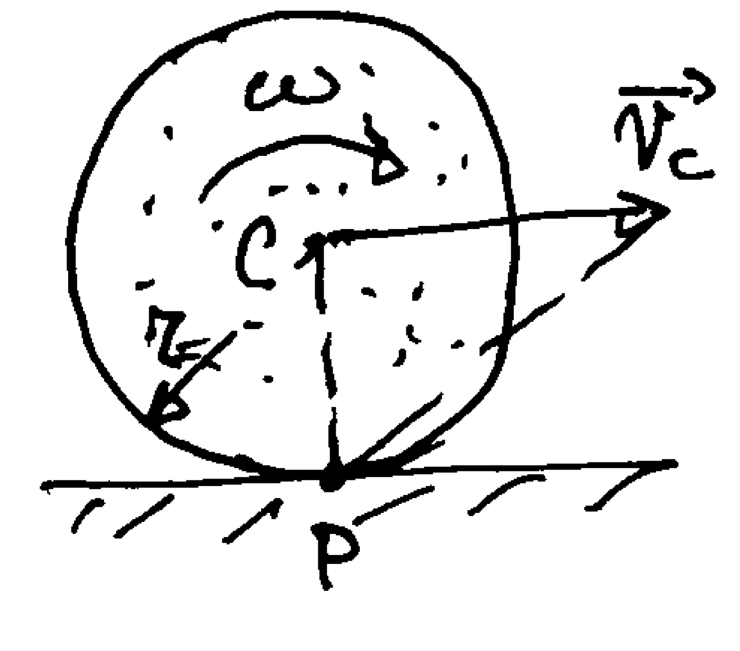
$$J_{Pz} = J_{Cz} + M\overline{CP}^2,$$

dobijamo

$$E_k = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2 \qquad (45)$$

U ovom izrazu prvi član predstavlja kinetičku energiju translatornog kretanja tijela određenog kretanjem centra inercije, dok drugi član predstavlja kinetičku energiju obrtanja tijela oko ose koja prolazi kroz centar inercije i upravna je na ravan kretanja.

Primjer. Odrediti kinetičku energiju homogenog točka, mase m i poluprečnika r, koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi, ako je brzina njegovog centra $V_c$.




Točak vrši ravno kretanje pa je

$$E_k = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2,$$

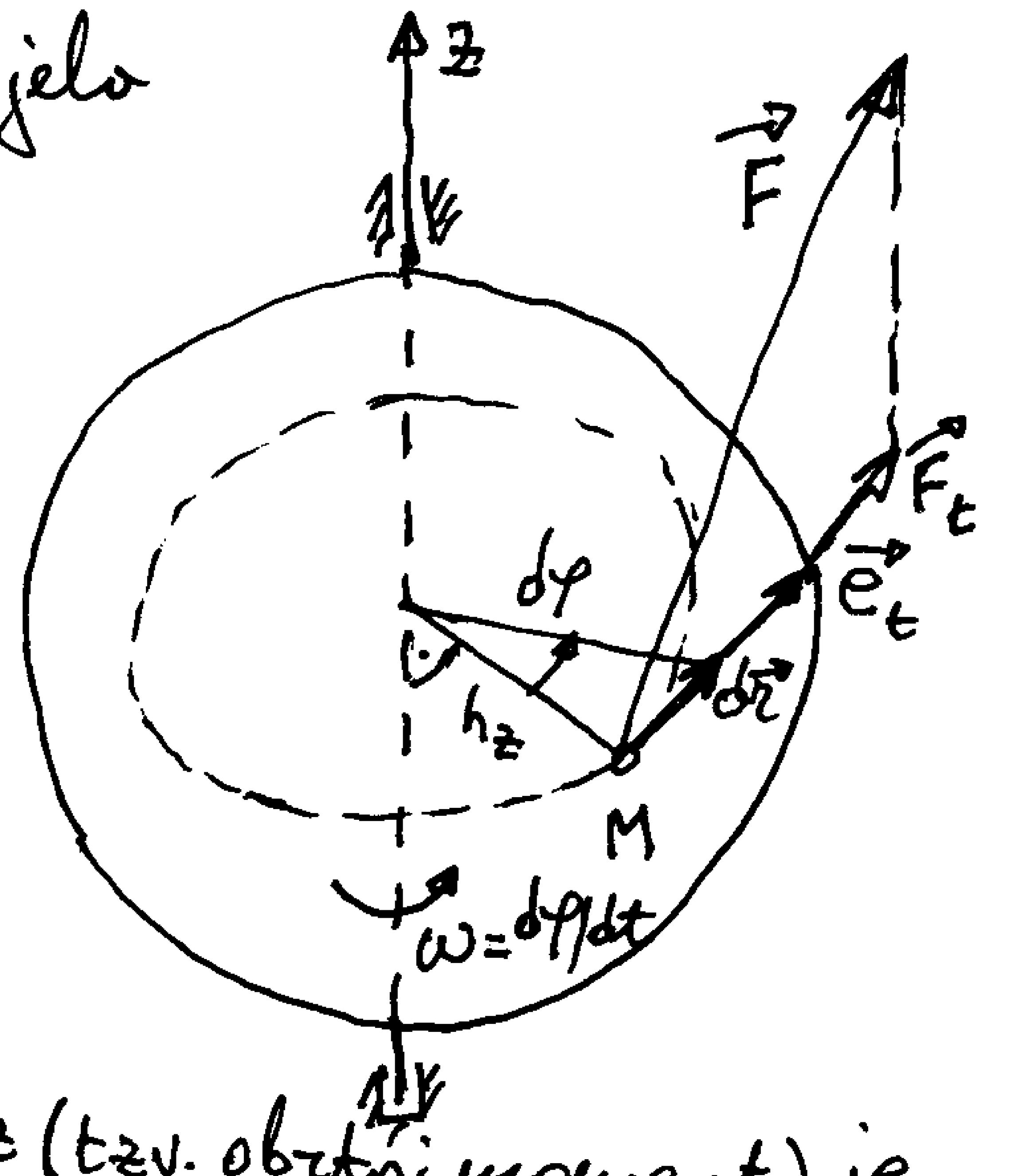
gdje je, prema (16), $J_{Cz} = J_C = mr^2/2$. S druge strane, pošto se točak kotrlja bez klizanja tačka P je trenutni pol brzina, pa je $V_c = r\omega$, odnosno $\omega = V_c/r$. Kada izraze za $J_C$ i $\omega$ uvrstimo u izraz za kinetičku energiju, dobijamo

$$E_k = \frac{3}{4} m V_c^2.$$

### 5.6.2 Neki slučajevi izračunavanja rada

a) Rad sile koja djeluje na tijelo koje se obrće.

Elementarni rad sile $\vec{F}$ koja djeluje na kruto tijelo koje se obrće jednak je




$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

gdje je $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$. Pošto je $\vec{v} = v\vec{e}_t$, $|\vec{e}_t| = 1$, i $v = h_z\omega$, biće $d\vec{r} = h_z\omega\,dt\,\vec{e}_t = h_z\,d\varphi\,\vec{e}_t$, jer je $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Sada je

$$\delta A = \vec{F}\cdot\vec{e}_t\, h_z\,d\varphi = F_t\, h_z\,d\varphi.$$

S druge strane, moment sile $\vec{F}$ za obrtnu osu $z$ (tzv. obrtni moment) je

$$M_z = M_z^{\vec{F}} = F_t\, h_z,$$

pa je konačno

$$\delta A = M_z\,d\varphi \qquad (46)$$

Dakle, u ovom slučaju elementarni rad jednak je proizvodu obrtnog momenta i elementarnog ugla obrtanja.

Jasno je da formula (46) važi i kada djeluje više sila, tj. kada je $M_z = \sum M_z^{\vec{F}_i}$.

Rad na konačnom obrtanju iz položaja određenog uglom $\varphi_1$ u položaj određen uglom $\varphi_2$ biće

$$A_{(1,2)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z\,d\varphi, \qquad (47)$$

a u slučaju konstantnog obrtnog momenta ($M_z = const$) je

$$A_{(1,2)} = M_z\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \qquad (48)$$

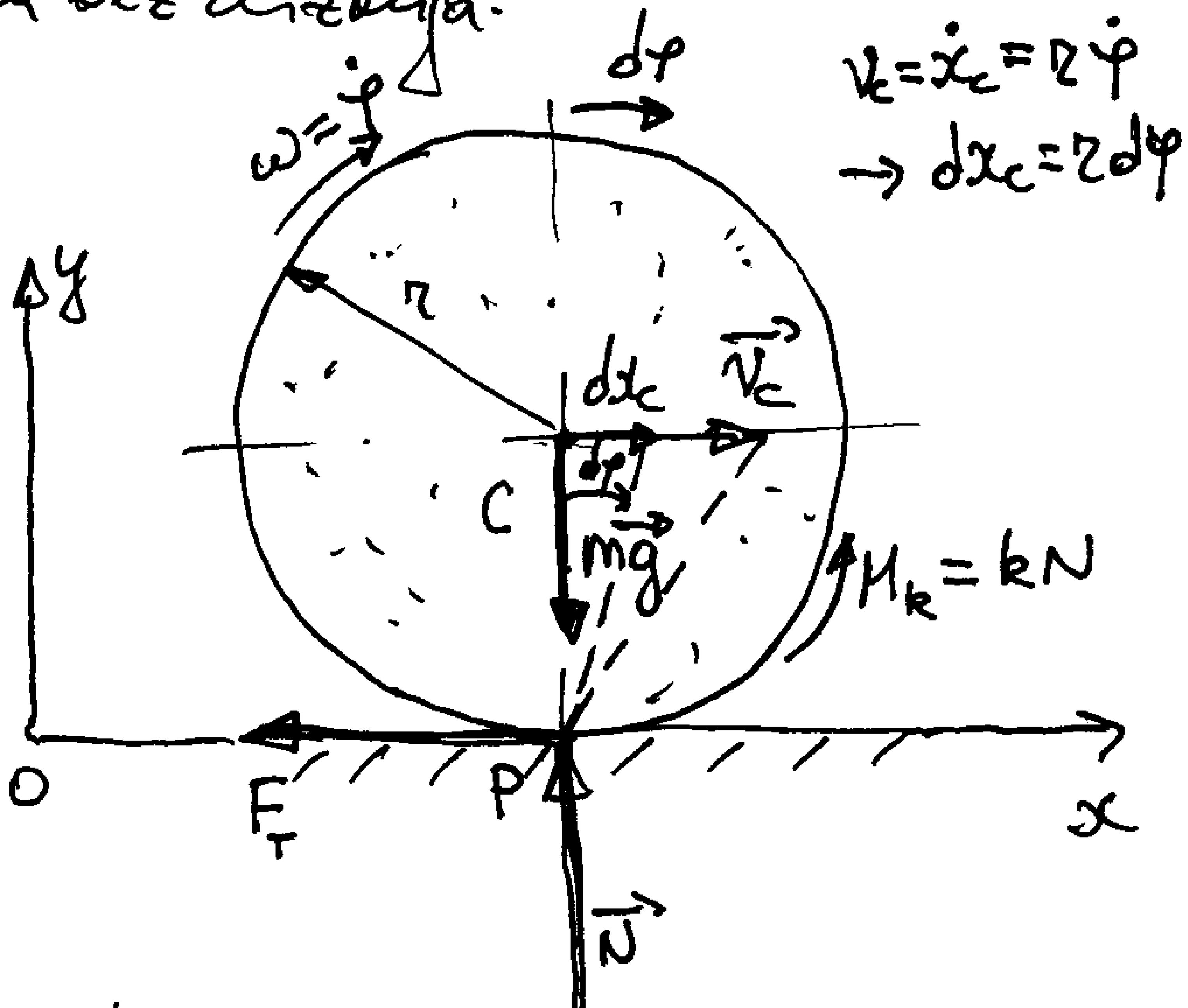
Također, jasno je da ako na tijelo djeluje spreg sila koje leže u ravni upravnoj na obrtnu osu $z$, onda u gornjim formulama $M_z$ označava moment ovog sprega.

Kada (46) podijelimo sa $dt$ dobijamo izraz za snagu:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = M_z\frac{d\varphi}{dt} = M_z\omega. \qquad (49)$$

Prema tome, snaga sile koja djeluje na kruto tijelo koje se obrće oko nepokretne ose jednaka je proizvodu obrtnog momenta i ugaone brzine tijela.

b) Rad sile trenja pri kotrljanju tijela bez klizanja.




Neka se točak, mase $m$ i poluprečnika $r$, kotrlja bez klizanja ($\vec{v}_P=0$) po horizontalnoj podlozi.

Elementarni rad sile trenja $\vec{F}_T$, koja sprečava klizanje tačke dodira točka po podlozi je

$$\hat{d}A(\vec{F}_T)=\vec{F}_T\cdot d\vec{r}_P$$

Pošto je tačka P trenutni pol brzina ($\vec{v}_P=0$), biće $d\vec{r}_P=\vec{v}_P\,dt=0$, pa je

$$\hat{d}A(\vec{F}_T)=0, \qquad (50)$$

tj. pri kotrljanju bez klizanja rad sile trenja, koja sprečava klizanje, jednak je nuli.

Elementarni rad momenta otpora protiv kotrljanja $M_k$ (v. (37)), prema formuli (46), je

$$\hat{d}A(M_k)=-M_k\,d\varphi=-kN\,d\varphi,$$

što se, imajući u vidu vezu između elementarnog ugla obrtanja $d\varphi$ i elementarnog pomjeranja centra točka $dx_C$ ($dx_C=r\,d\varphi$), može napisati u obliku

$$\hat{d}A(M_k)=-\frac{k}{r}N\,dx_C \qquad (51)$$

Napomenimo da je ovaj rad negativan, jer su $d\varphi$ i $M_k$ suprotnih smjerova.

### 5.6.3 Zakon o održanju mehaničke energije

Ako su sve sile koje vrše rad konzervativne, bilo da su spoljašnje ili unutrašnje, onda je

$$\hat{d}A^{(s)}+\hat{d}A^{(u)}=-dE_p^{(s)}-dE_p^{(u)}=-dE_p,$$

gdje je $E_p=E_p^{(s)}+E_p^{(u)}$ ukupna potencijalna energija spoljašnjih i unutrašnjih sila. U ovom slučaju, iz zakona o promjeni kinetičke energije (40) slijedi

$$d(E_k+E_p)=0,$$

tj.

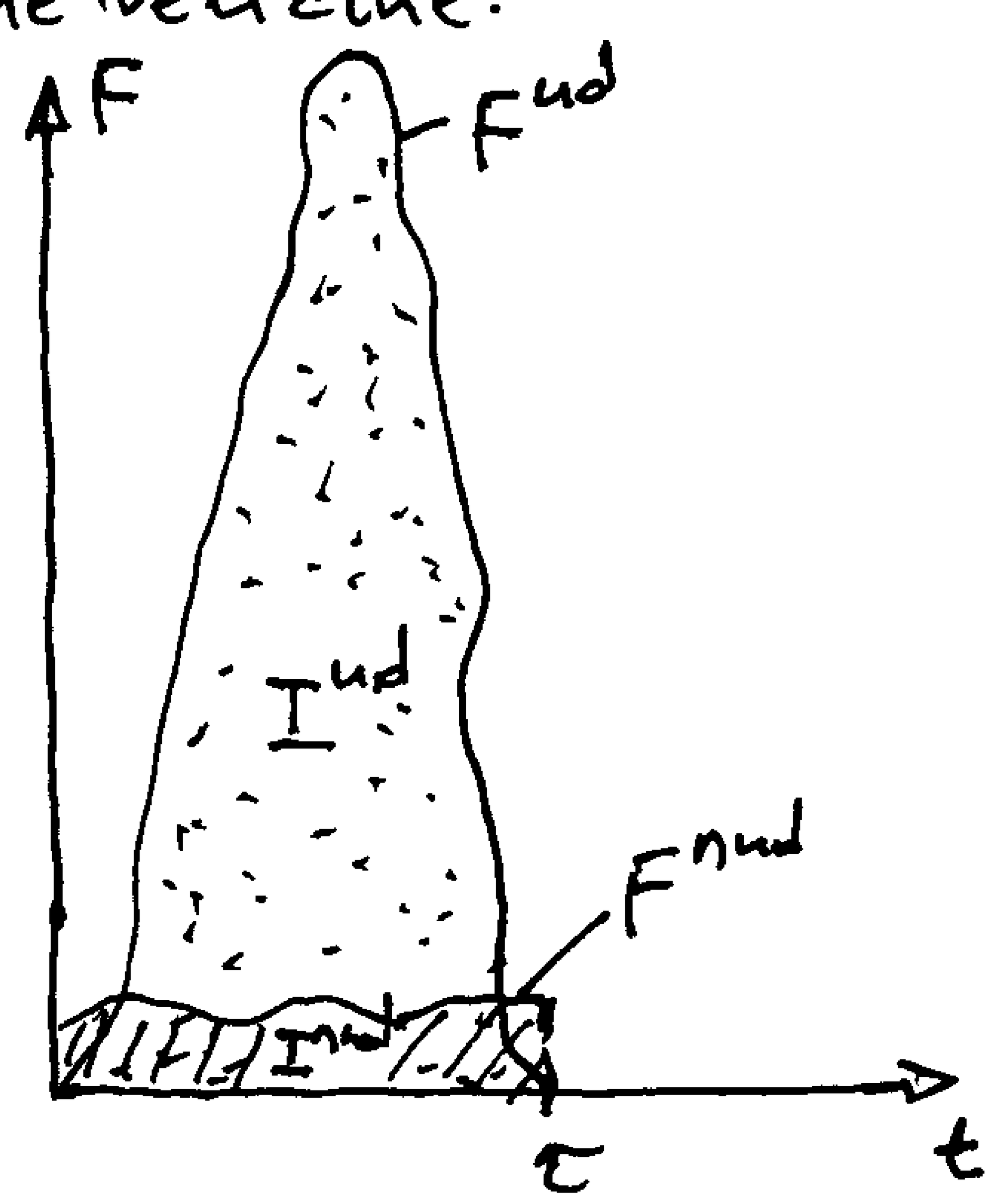
$$E=E_k+E_p=\text{const}, \qquad (52)$$

gdje se zbir kinetičke i potencijalne energije sistema zove ukupna mehanička energija. Ovo je zakon o održanju mehaničke energije: Ako su sve sile koje vrše rad konzervativne, onda zbir kinetičke i potencijalne energije sistema ostaje konstantan tokom kretanja.

# 6. Osnovi teorije udara

Udar je pojava pri kojoj se brzine tačaka materijalnih objekata u toku vrlo malog intervala vremena $\tau$ promijene za konačne veličine.

Sile pod čijem dejstvom nastaje udar zovu se udarne sile. Njihovi intenziteti za vrijeme udara dostižu veoma velike vrijednosti, znatno veće od intenziteta običnih (neudarnih) sila.




Impulsi udarne $\vec{F}^{ud}$ i neudarne sile $\vec{F}^{nud}$ za vrijeme udara su

$$\vec{I}^{ud} = \int_0^{\tau} \vec{F}^{ud} dt \; , \; \vec{I}^{nud} = \int_0^{\tau} \vec{F}^{nud} dt$$

Kako postoji velika razlika u intenzitetima udarne i neudarne sile $(\max|\vec{F}^{ud}| \gg \max|\vec{F}^{nud}|)$, to će takođe biti velika razlika u intenzitetima njihovih impulsa tokom procesa udara:

$$I^{ud} \gg I^{nud}$$

Zbog veoma male vrijednosti impulsa neudarne sile u odnosu na impuls udarne sile, može se, sa zadovoljavajućim stepenom tačnosti, zanemariti impuls neudarne sile:

$$\vec{I}^{nud} = 0 \qquad (1)$$

Dakle, pri posmatranju pojave udara impulsi neudarnih sila se zanemaruju.

## 6.1 Osnovna jednačina udara. Koeficijent udara

Posmatrajmo sada udar kod materijalne tačke mase $m$.

Neka je $\vec{V} = \vec{v}(t_1)$ brzina tačke na početku udara, a $\vec{U} = \vec{v}(t_2)$ brzina tačke na kraju udara, $t_2 - t_1 = \tau$. Pomjeranje tačke za vrijeme udara $\tau$ je $\Delta\vec{r} = \vec{v}_{sr}\tau$ i predstavlja vrlo malu veličinu $(\tau \ll 1)$, koja se praktično može zanemariti: $\Delta\vec{r} \approx 0$. S druge strane, glavna posledica dejstva udarnih sila jeste konačna promjena brzine materijalne tačke u kratkom vremenskom intervalu: $\Delta\vec{v} = \vec{U} - \vec{V}$. Na osnovu zakona o promjeni količine kretanja materijalne tačke (v. § 4.11) za vrijeme udara, biće

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}^{ud} + \vec{I}^{nud}.$$

Imajući u vidu da je $\vec{K}_2 = m\vec{U}$, $\vec{K}_1 = m\vec{V}$, kao i pretpostavku (1), ova jednačina se svodi na

$$m(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{I}^{ud} \qquad (2)$$

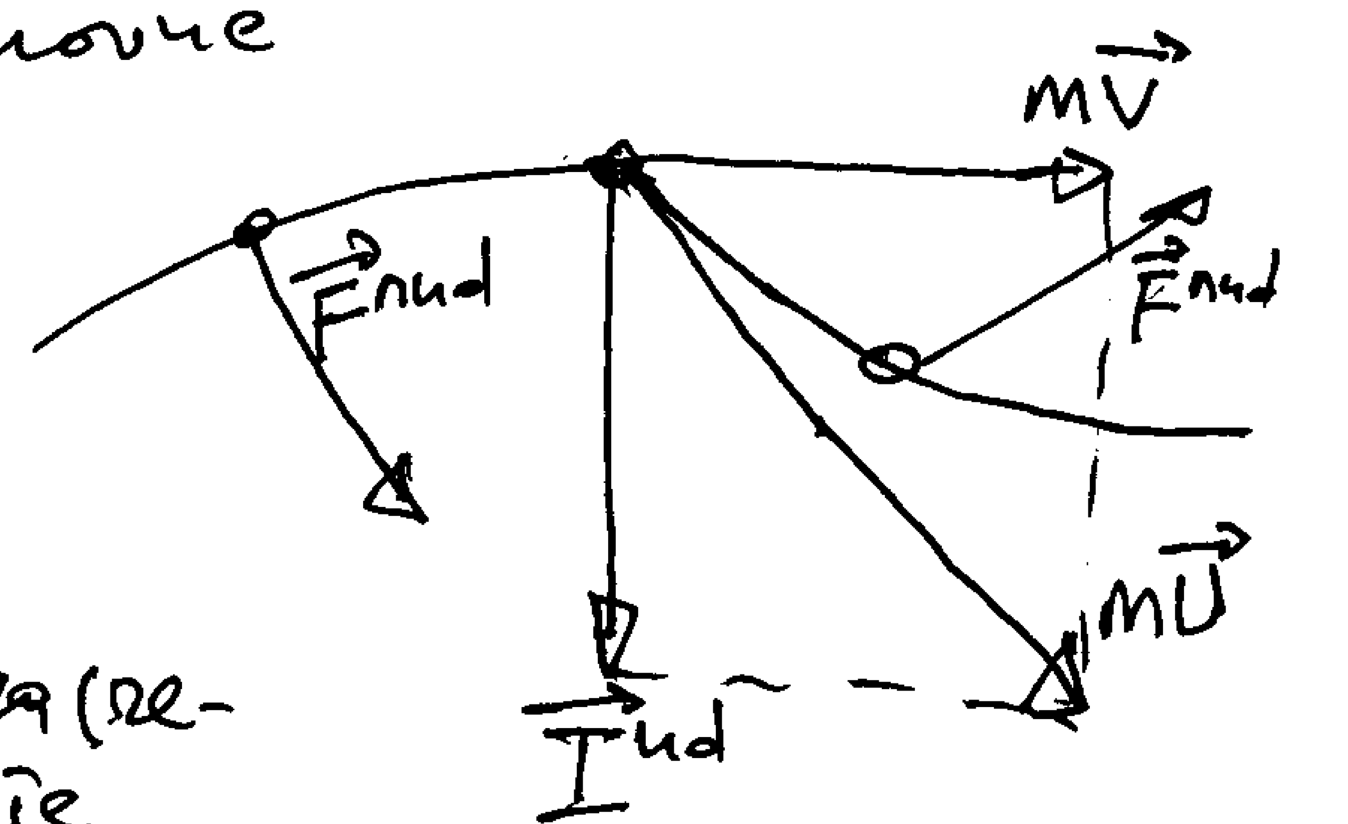
i ona predstavlja osnovnu jednačinu teorije udara.

Prema tome, na osnovu prethodne analize proizilazi:

1) Dejstvo neudarnih sila za vrijeme udara se zanemaruje;

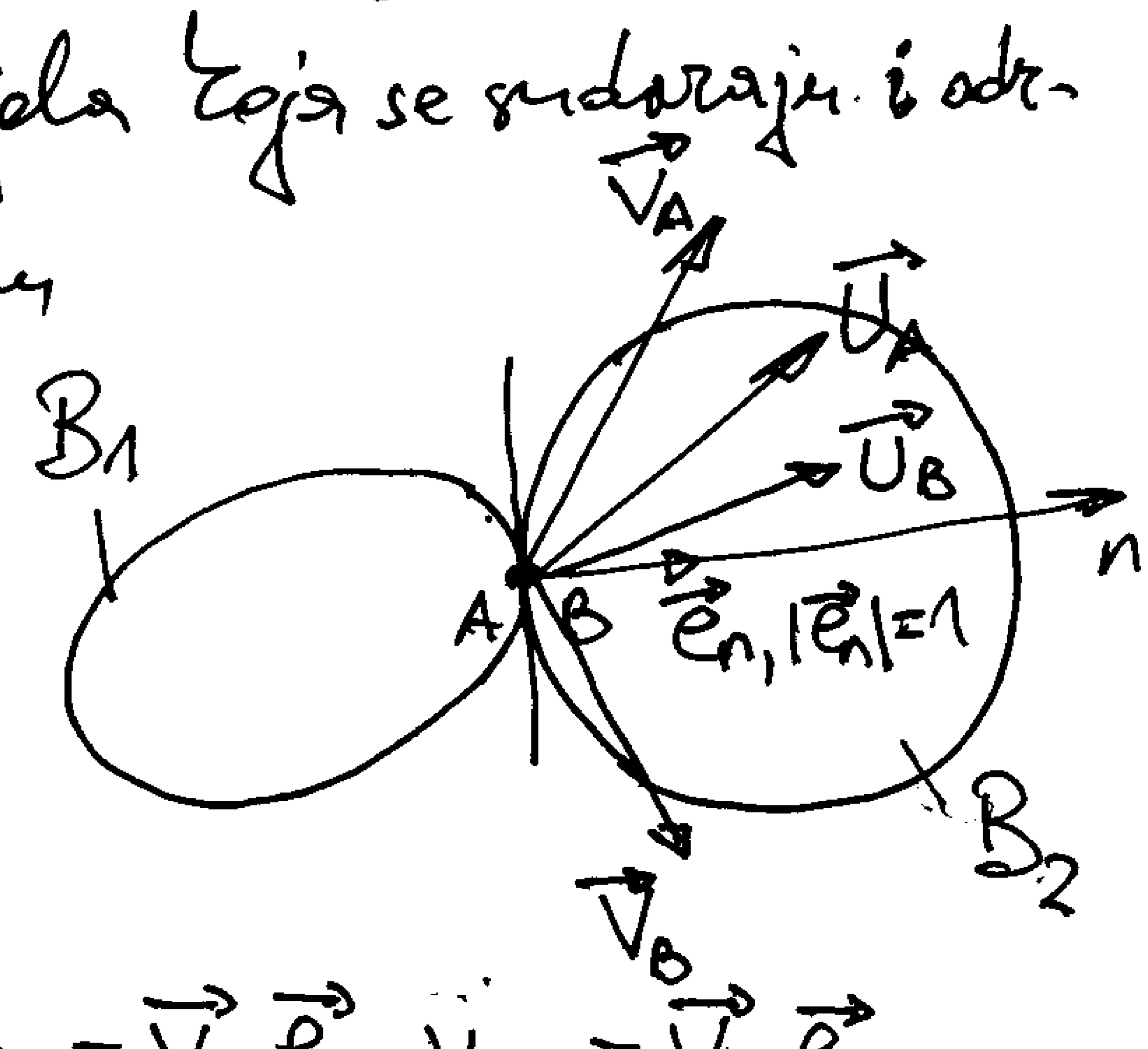
2) Za vrijeme udara tačka ostaje nepokretna;

3) Promjena brzine materijalne tačke za vrijeme udara određuje se na osnovu osnovne jednačine teorije udara (2).




Jednačina (2) nije dovoljna za potpuno određivanje svih nepoznatih veličina koje se javljaju u opisu sudara. Dodatna relacija se dobija korišćenjem koeficijenta udara (restitucije, uspostavljanja) $k$ koji karakteriše ponašanje materijala od kojih su sačinjena tijela koja se sudaraju i određuje se eksperimentalno.

Koeficijent uspostavljanja je definisan količnikom apsolutnih vrijednosti projekcija relativnih brzina dodirnih tačaka tijela, na kraju i na početku udara, na zajedničku normalu u tački kontakta dva tijela:




$$k = \frac{|U_{Bn} - U_{An}|}{|V_{Bn} - V_{An}|} \quad (3)$$

$$V_{An} = \vec{V}_A \cdot \vec{e}_n, \; V_{Bn} = \vec{V}_B \cdot \vec{e}_n$$
$$U_{An} = \vec{U}_A \cdot \vec{e}_n, \; U_{Bn} = \vec{U}_B \cdot \vec{e}_n$$

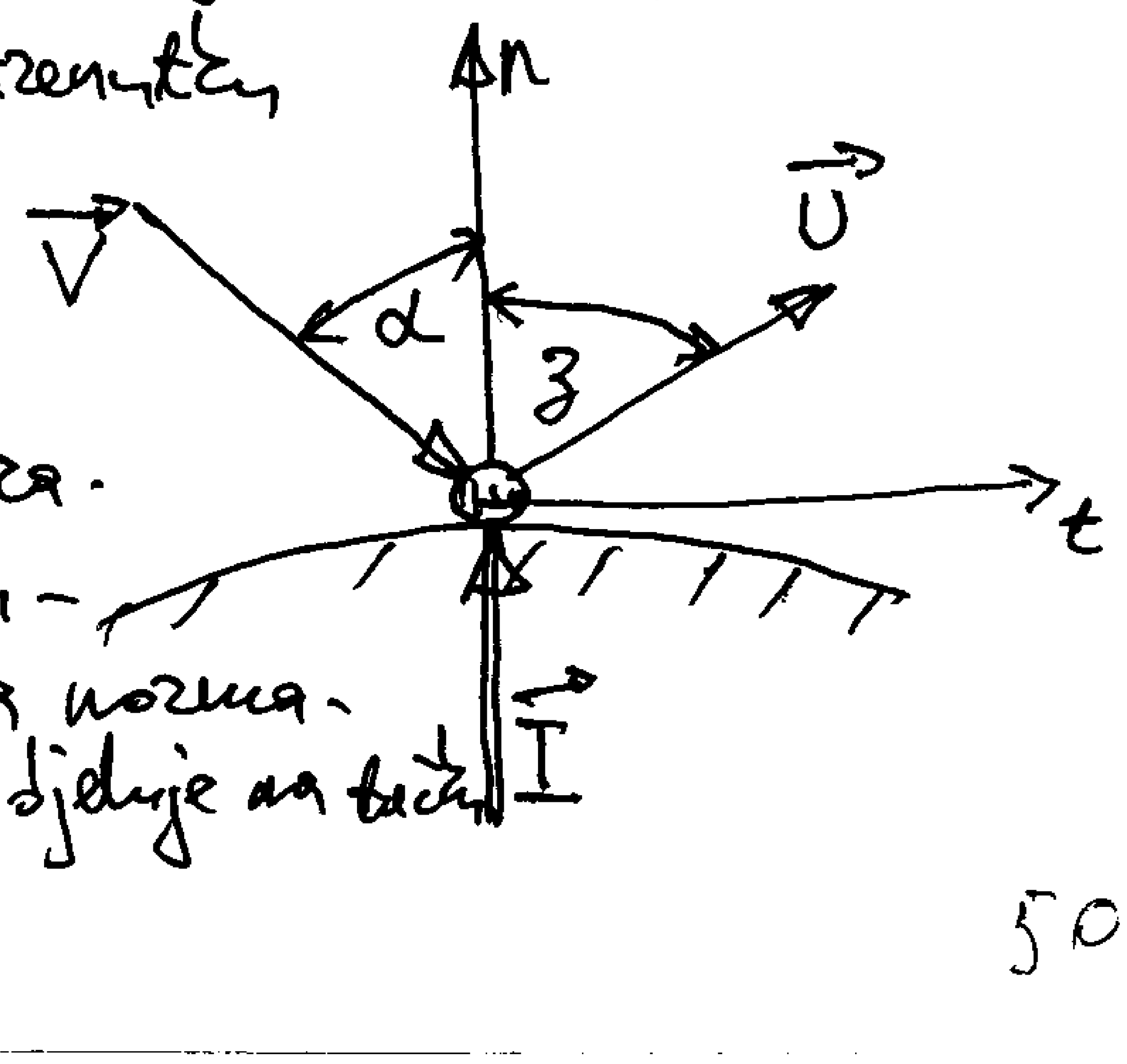
Ako je tijelo $B_2$ nepokretno, tada je

$$k = \frac{|U_{An}|}{|V_{An}|} \quad (3')$$

Vrijednost koeficijenta $k$ je ograničena: $0 \leq k \leq 1$.
Krajnje vrijednosti se odnose na dva idealizovana slučaja: kada je $k=1$ udar je idealno elastičan, a kada je $k=0$ udar je idealno neelastičan ili plastičan.

## Udar materijalne tačke u masivnu glatku prepreku.

Posmatrajmo tačku mase $m$ koja u nekom trenutku udara u nepokretnu glatku prepreku. Neka je u trenutku stupanja u kontakt sa preprekom brzina tačke $V$ i neka ona obrazuje ugao $\alpha$ sa pravcem normale na prepreku u tački dodira. Treba da odredimo brzinu tačke $U$ poslije sudara, ugao $\beta$ koji vektor ove brzine zaklapa sa normalom, kao i veličinu udarnog impulsa $I$ koji djeluje na tačku



Za vrijeme udara (dok su tačka i prepreka u kontaktu), prepreka djeluje na materijalnu tačku udarnom silom koja pada u pravcu normale na prepreku, jer je ona glatka. Zato će i odgovarajući impuls $\vec{I}$ udarne sile imati pravac normale na prepreku u tački dodira. Osnovna jednačina udara (2) u ovom slučaju glasi:

$$m(\vec{U}-\vec{V})=\vec{I},$$

a njene projekcije na tangentu i normalu su:

$$\left.\begin{aligned} m(U\sin\beta - V\sin\alpha) &= 0, \\ m(U\cos\beta + V\cos\alpha) &= I. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

U ovom slučaju, koeficijent uspostavljanja je

$$k=\frac{|U_n|}{|V_n|}=\frac{U\cos\beta}{V\cos\alpha} \qquad (**)$$

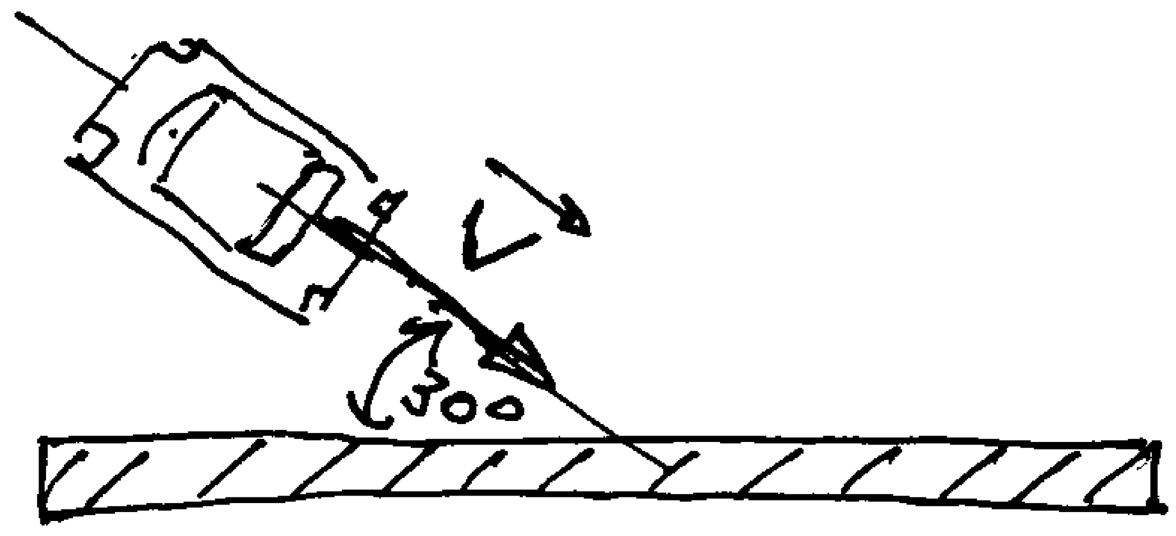
Rješavanjem jednačina $(*)$ i $(**)$ nalazimo:

$$U=V\sqrt{\sin^2\alpha+k^2\cos^2\alpha}, \quad \tan\beta=\frac{1}{k}\tan\alpha; \quad I=m(k+1)V\cos\alpha. \quad (\#)$$

U realnim uslovima je $k<1$ pa je očigledno $U<V$ (brzina poslije sudara ima manji intenzitet od brzine prije sudara) i $\beta>\alpha$ (odbojni ugao je veći od upadnog.

Primjer- Automobil, mase $m = 1200\,kg$, udara u zaštitnu ogradu puta brzinom intenziteta $V = 120\,km/h$, pod uglom od $30^\circ$ u odnosu na ogradu. Ako je vrijeme trajanja udara $\tau = 0{,}05\,s$, a koeficijent udara $k = 0{,}1$ odrediti: udarni impuls, srednju udarnu silu, brzinu automobila na kraju udara i ugao pod kojim se automobil odbija od ograde.

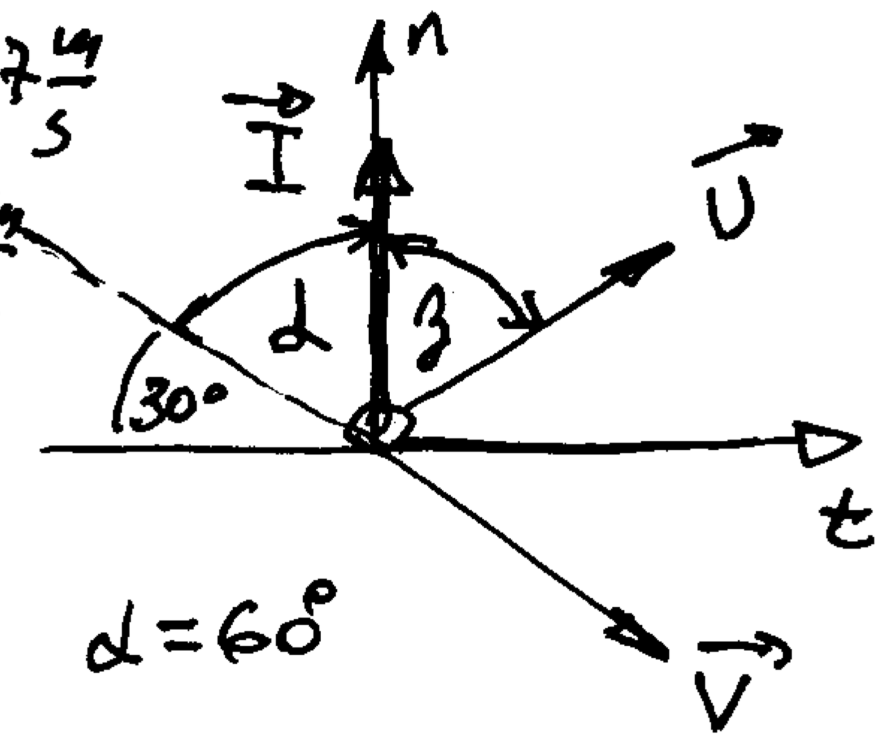
Automobil smatrati materijalnom tačkom.




$$m(\vec{U}-\vec{V})=\vec{I} \Rightarrow m(U_t - V_t) = 0 \Rightarrow U_t = V_t = V\sin\alpha = 28{,}87\,\frac{m}{s}$$

$$m(U_n - V_n) = I, \quad V_n = -V\cos\alpha = -16{,}67\,\frac{m}{s}$$

$$k = \frac{|U_n|}{|V_n|} \Rightarrow U_n = 1{,}67\,\frac{m}{s}$$




$$\Rightarrow I = m(U_n - V_n) \approx 22000\ Ns$$

$$F_{sr}^{ud} = \frac{I}{\tau} = 440{,}00\ kN$$

Primjetimo da je $F_{sr}^{ud}/mg \approx 37$; srednja udarna sila je 37 puta veća od težine automobila

$$U = \sqrt{U_t^2 + U_n^2} = 28{,}92\,\frac{m}{s}$$

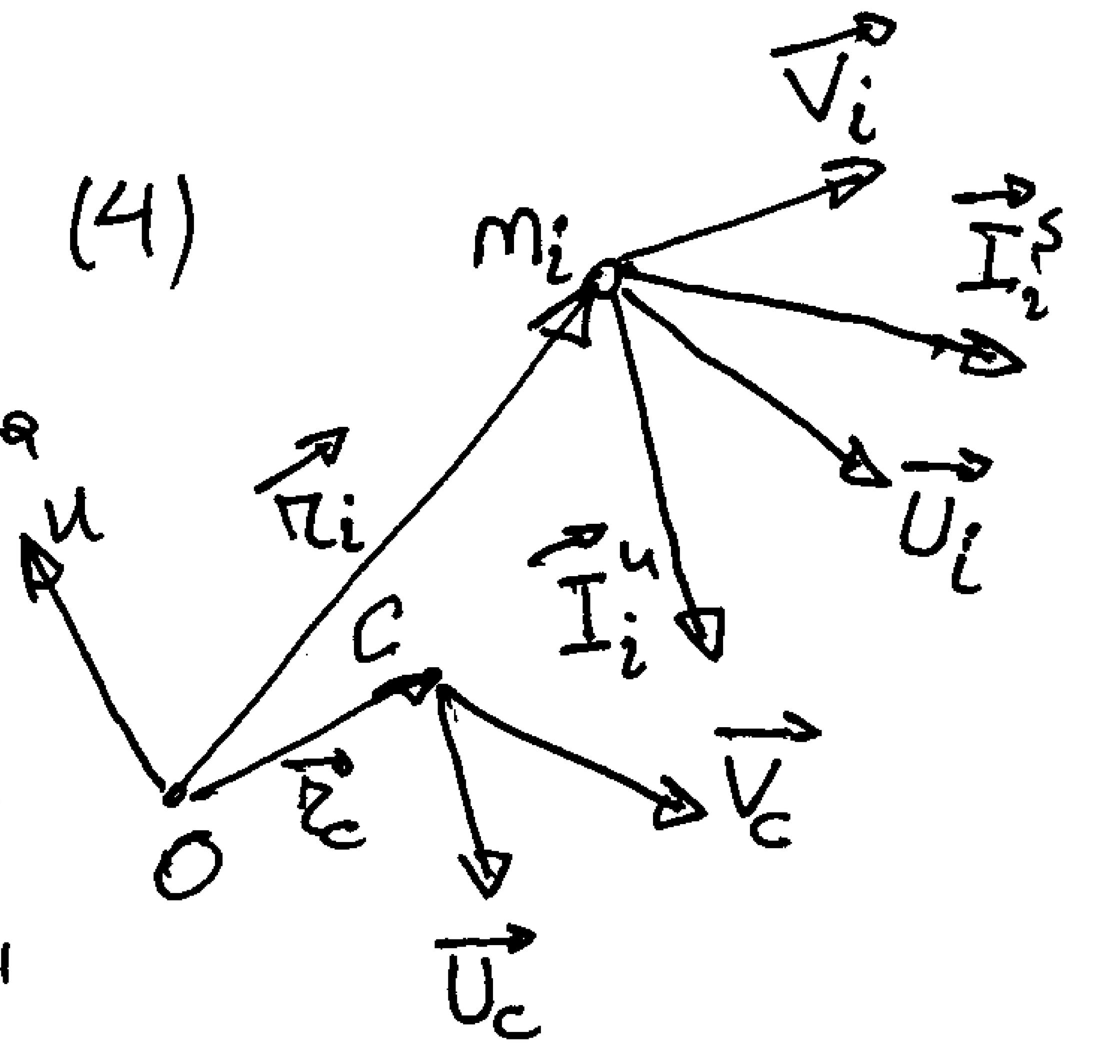
$$\tan\beta = \frac{U_t}{U_n} = 17{,}287 \Rightarrow \beta = 86{,}69^\circ,$$ tj. automobil se odbija od ograde pod uglom $90^\circ - \beta = 3{,}31^\circ$

Takođe, primijetimo da se zadatak može riješiti direktnom primjenom formula (#).

## 6.2 Udar sistema materijalnih tačaka.

Neka se sistem sastoji od $n$ materijalnih tačaka čije su mase $m_i$, $i=1,\dots,n$. Označimo sa $\vec{I}_i^s$ i $\vec{I}_i^u$ rezultante impulsa spoljašnjih i unutrašnjih udarnih sila koje djeluju na $i$-tu tačku, respektivno.
Prema jednačini (2), biće

$$m_i(\vec{U}_i-\vec{V}_i)=\vec{I}_i^s+\vec{I}_i^u,\quad i=1,\dots,n, \qquad (4)$$




gdje su $\vec{U}_i$ i $\vec{V}_i$ brzine $i$-te tačke na kraju i na početku udara.
Sabiranjem prethodnih jednačina i uzimanjem u obzir da je, zbog osobine unutrašnjih sila, suma impulsa unutrašnjih udarnih sila jednaka nuli, dolazi se do zakona o promjeni količine kretanja materijalnog sistema pri udaru:

$$\vec{K}_2-\vec{K}_1=\vec{I}_2^s, \quad \vec{I}_2^s=\sum_{i=1}^{n}\vec{I}_i^s \qquad (5)$$

Prema tome, priraštaj (promjena) količine kretanja materijalnog sistema za vrijeme udara jednaka je glavnom vektoru impulsa svih spoljašnjih udarnih sila koje djeluju na sistem.
Kako je $\vec{K}_1=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_i=m\vec{V}_c$ i $\vec{K}_2=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{U}_i=m\vec{U}_c$, gdje je $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$ – masa sistema, a $\vec{V}_c$ i $\vec{U}_c$ brzine centra inercije sistema na početku i na kraju udara, jednačina (4) se može napisati u obliku

$$m(\vec{U}_c-\vec{V}_c)=\sum\vec{I}_i^s \qquad (5')$$

Projiciranjem vektorske jednačine (4) na bilo koju osu $u$ dolazimo do zakona o promjeni projekcije količine kretanja sistema na tu osu:

$$K_{2u}-K_{1u}=\sum_{i=1}^{n} I_{iu}^s \qquad (6)$$

Ako je $\sum\vec{I}_i^s=0$, onda je, na osnovu (5), $\vec{K}_2=\vec{K}_1$, tj. tada važi zakon o održanju količine kretanja materijalnog sistema pri udaru.

Označimo sa $\vec{L}_{O1}$ i $\vec{L}_{O2}$ momente količine kretanja sistema u odnosu na tačku O na početku i na kraju udara, tj.

$$\vec{L}_{O1} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{m_i \vec{v}_i} \, , \quad \vec{L}_{O2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{m_i \vec{u}_i} .$$

Ako jednačine (4) pomnožimo s lijeva vektorski vektorima položaja odgovarajućih tačaka, zatim tako dobijene jednačine saberemo i imajući u vidu da je, zbog osobine unutrašnjih sila, $\sum \vec{M}_O^{\vec{I}_i^u} = 0$, dobijamo zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalnog sistema pri udaru:

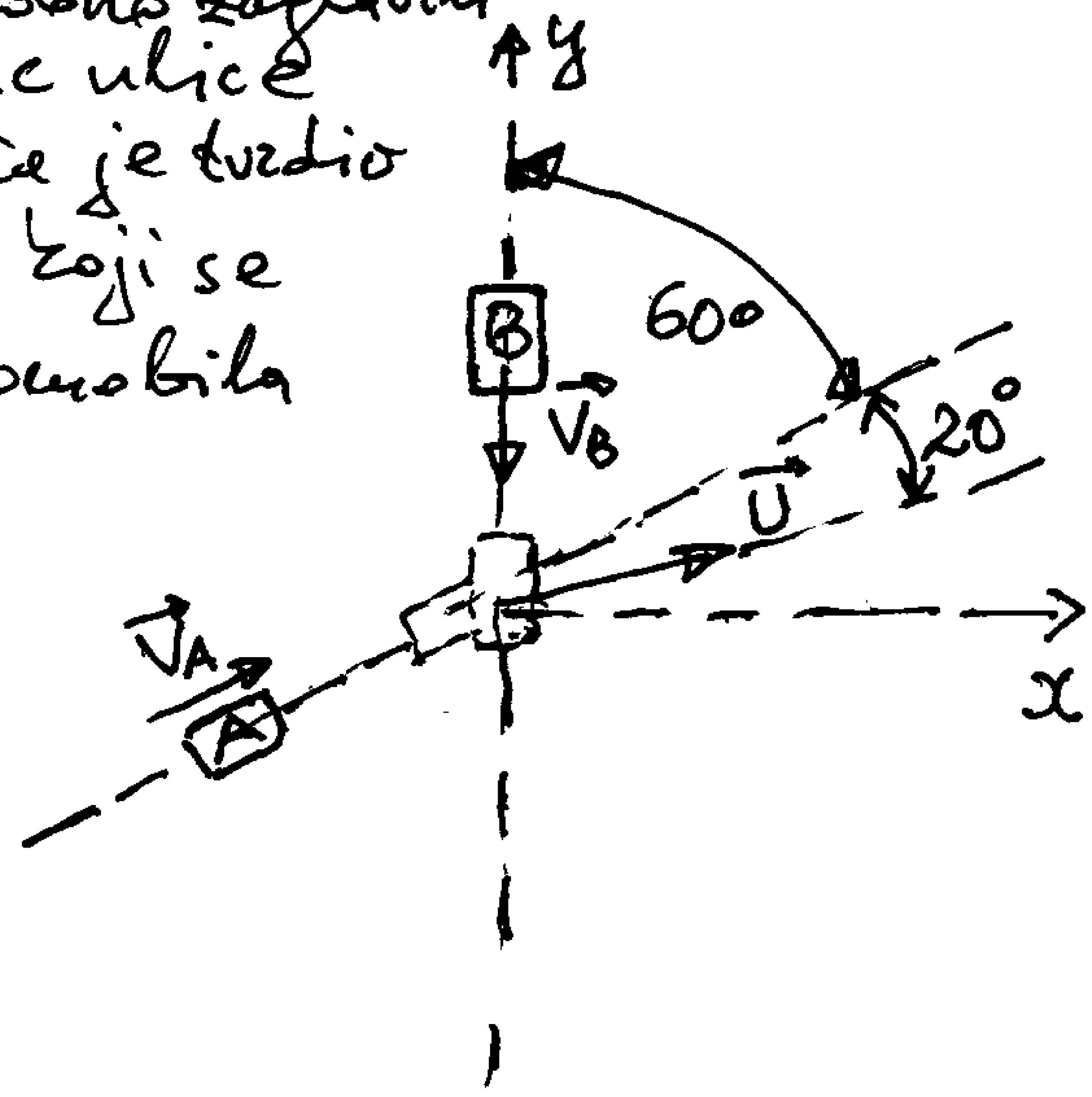
$$\vec{L}_{O2} - \vec{L}_{O1} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{I}_i^s} , \qquad (7)$$

koji glasi: Promjena momenta količine kretanja sistema za bilo koju tačku, za vrijeme udara, jednaka je sumi momenata za istu tačku svih impulsa spoljašnjih udarnih sila koje djeluju na sistem.

U obliku projekcije na bilo koju osu $u$ jednačina (7) daje

$$L_{2u} - L_{1u} = \sum_{i=1}^{n} M_u^{\vec{I}_i^s} . \qquad (8)$$

Primjer. Na raskrsnici dvije ulice, čiji pravci zaklapaju ugao od 60°, došlo je do sudara automobila A i B, masa $m_A = 1500$ kg i $m_B = 1200$ kg. Nakon istrage utvrđeno je da su se pri sudaru automobili međusobno zaglavili i skliznuli pod uglom od 20° u odnosu na pravac ulice kojom se kretao automobil A. Svaki od vozača je tvrdio da je vozio brzinom od 50 km/h. Odrediti: a) koji se automobil kretao brže? b) brzinu bržeg automobila ako je drugi "išao" brzinom od 50 km/h.




Za sistem koji čine automobili A i B, udarne sile koje se javljaju za vrijeme njihovog sudara su unutrašnje sile pa važi zakon održanja količine kretanja

$$\vec{K}_2 = \vec{K}_1$$

gdje je $\vec{K}_1 = m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B$ – količina kretanja sistema na početku sudara,

i $\vec{K}_2 = (m_A+m_B)\vec{U}$ – " – krају " – .

Projiciranjem vektorske jednačine

$$m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B = (m_A+m_B)\vec{U}$$

na ose x i y, dobijamo

$$m_A V_A \sin 60° + m_B \cdot 0 = (m_A+m_B)\, U \sin 80°$$

$$m_A V_A \cos 60° - m_B V_B = (m_A+m_B)\, U \cos 80°,$$

odakle slijedi

$$\frac{V_B}{V_A} = 0{,}434, \quad \text{tj } V_A = 2{,}3\, V_B$$

Dakle, automobil A se kretao brže od automobila B.

b) Za $V_B = 50 \frac{km}{h}$ dobijamo da je $V_A = 115{,}2 \frac{km}{h}$

**Tehnička mehanika II**

**Pitanja za II kolokvijum**

1. Njutnovi zakoni dinamike.
2. Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke u Dekartovim koordinatama.
3. Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke u prirodnom koordinatnom sistemu.
4. Koji su osnovni zadaci dinamike tačke?
5. Slobodni pad u homogenom polju sile teže u bezvazdušnom prostoru.
6. Pravolinijske harmonijske oscilacije materijalne tačke.
7. Kosi hitac u homogenom polu sile teže u bezvazdušnom prostoru.
8. Matematičko klatno.
9. Kako glasi Dalamberov princip za materijalnu tačku?
10. Definisati rad sile.
11. Kako se određuje rad sile teže?
12. Kako se određuje rad elastične sile opruge?
13. Kako se definiše konzervativna sila i čemu je jednak njen rad?
14. Definisati snagu sile.
15. Kako glasi zakon o promjeni kinetičke energije materijalne tačke (diferencijalni i integralni oblik)?
16. Kako glasi zakon održanja mehaničke energije?
17. Kako se definiše impuls sile?
18. Kako glasi zakon o promjeni količine kretanja materijalne tačke (diferencijalni i integralni oblik)?
19. Kako glasi zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalne tačke za nepokretnu tačku i nepokretnu osu?
20. Napisati diferencijalne jednačine kretanja tačaka materijalnog sistema u vektorskom obliku.
21. Koje su osobine unutrašnjih sila materijalnog sistema?
22. Kako se definiše centar inercije sistema?
23. Kako se definiše moment inercije materijalnog sistema za osu i kako glasi Hajgens-Štajnerova teorema?
24. Kako glasi diferencijalni oblik zakona o promjeni količine kretanja materijalnog sistema i koje su njegove posledice?
25. Kako glasi integralni oblik zakona o promjeni količine kretanja materijalnog sistema?
26. Kako glasi zakon o kretanju centra inercije materijalnog sistema i koje su njegove posledice?
27. Kako glasi zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalnog sistema za nepokretnu tačku i nepokretnu osu? Koje su posledice ovog zakona?
28. Diferencijalna jednačina obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose.
29. Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja krutog tijela.
30. Kako glasi zakon o promjeni kinetičke energije materijalnog sistema?
31. Kako glasi zakon održanja mehaničke energije materijalnog sistema?
32. Kako se određuje kinetička energija krutog tijela (translatorno kretanje, obrtanje oko nepokretne ose, ravansko kretanje)?
33. Kako se određuje rad sile koja djeluje na tijelo koje se obrće?
34. Šta je to udar i kako glasi osnovna jednačina udara?